Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	1. zatia

Azterketa osoaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- $\begin{cases} x-y+5t-6=0 \\ 2t+x-2=0 \end{cases}$ **sistema emanik**

a) Azter ezazu funtzio inplizituaren teoremako baldintzak betetzen ote diren $P(x,y,t)=(2,-4,0)$ puntan, $x=x(t)$ eta $y=y(t)$ funtzioak definitzeko.

b) Izan bedi $C\equiv\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ kurba. Kalkulatu kurba honen arku-luzera $A(x,y)=(2,-4)$ puntutik $B(x,y)=(0,-1)$ puntura.

(2 puntu)

a) Ikus dezagun ea $\begin{cases} F(x,y,t)=x-y+5t-6=0 \\ G(x,y,t)=2t+x-2=0 \end{cases}$ sistemak funtzio inplizituaren teorema egiaztatzen duen:

i. $\begin{cases} F(P)=2+4-6=0 \\ G(P)=2-2=0 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} F'_x=1 & F'_y=-1 & F'_t=5 \\ G'_x=1 & G'_y=0 & G'_t=2 \end{cases}$ jarraituak dira $\mathbb{R}^3$ osoan.

iii. $\left|\dfrac{D(F,G)}{D(x,y}\right|_P=\begin{vmatrix} F'_x(P) & F'_y(P) \\ G'_x(P) & G'_y(P) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1\neq 0$

Beraz, $x=x(t)$ eta $y=y(t)$ diferentziagarriak existitzen dira, non $x(0)=2$ eta $y(0)=-4$

b) $A(x,y)=(2,-4)$ $\Leftrightarrow$ $t=0$ (emandako P puntuaren koordenatuak dira). Eta, era berean, $B(x,y)=(0,-1)$ puntua sisteman ordezkatuz, $B(x,y)=(0,-1)$ $\Leftrightarrow$ $t=1$.

Honela, $C \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ kurbaren arku-luzera $A(x,y)=(2,-4)$ puntutik $B(x,y)=(0,-1)$ puntura lerro-intergral honek ematen digu:

$$L = \int_0^1 \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt$$

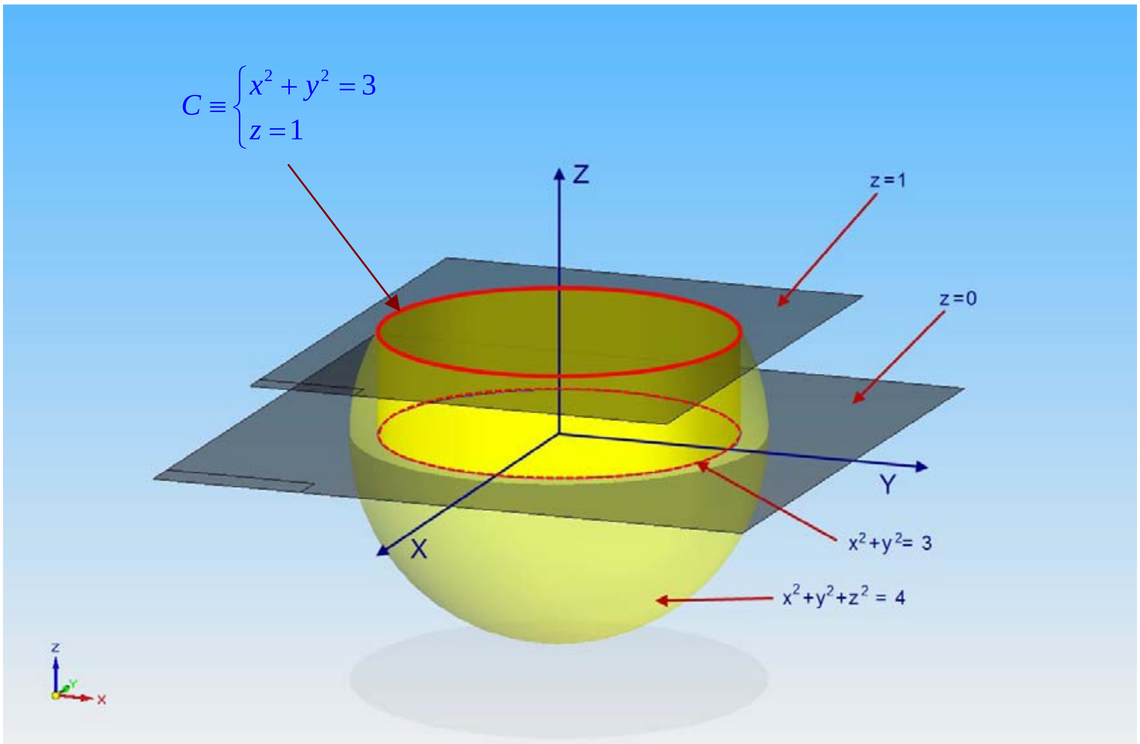
Orain, sisteman *t*-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} x'(t) - y'(t) + 5 = 0 \\ 2 + x'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'(t) = -2 \end{cases} \Rightarrow \quad y'(t) = 3 \quad \Rightarrow \quad L = \int_0^1 \sqrt{13}dt = \sqrt{13}$$

2.- Aurkitu $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+x+y+z$ **funtzioaren mutur absolutuak** $M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2\leq 4 \;\wedge\; z\leq 1\right\}$ **multzoan.**

(3 puntu)

f funtzio jarraitua da *M* multzo itxi eta mugatuan, orduan Weiestrass-en teoremak ziurtatzen digu multzo horretan *f*-ren maximo eta minimo absolutuak existitzen direla.



a) *f*-ren puntu kritiko ez-baldintzatuak kalkulatzen hasiko gara:

$$\begin{cases}f'_x=2x+1=0\\ f'_y=2y+1=0\\ f'_z=2z+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \quad A=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\in M$$

b) Orain, *f*-ren puntu kritiko baldintzatuak (*M* multzoaren mugan daudenak) kalkulatuko ditugu. *M*-ren muga bi zatitan bananduta dagoenez, bakoitza baldintza baten bitartez adierazita dagoena, hiru kasu bereiziko ditugu:

b.1) $z=1 \quad \left(\forall (x,y)/\,x^2+y^2<3\right) \quad \Rightarrow$

$$f(x,y,1)=x^2+y^2+x+y+2=F(x,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}F'_x=2x+1=0\\ F'_y=2y+1=0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad B=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$$

b.2) $x^2+y^2+z^2=4 \quad (z<1)$

Kasu honetan Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliko dugu:

$$w(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+x+y+z+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$$

$$\left.\begin{cases} \left.\begin{array}{l} w'_x=2x+1+2\lambda x=0 \Leftrightarrow 2x(1+\lambda)+1=0 \\ w'_y=2y+1+2\lambda y=0 \Leftrightarrow 2y(1+\lambda)+1=0 \\ w'_z=2z+1+2\lambda z=0 \Leftrightarrow 2y(1+\lambda)+1=0 \end{array}\right\rangle \overset{(*)}{\Rightarrow} 1+\lambda=-\dfrac{1}{2x}=-\dfrac{1}{2y}=-\dfrac{1}{2z} \Leftrightarrow x=y=z \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}\right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2=4 \quad \Rightarrow \quad x^2=\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}=y=z$$

Baina $z=\dfrac{2}{\sqrt{3}}>1 \quad \Rightarrow \quad D=\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}},-\dfrac{2}{\sqrt{3}},-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ puntua dugu bakarrik.

b.3) Mugaren zati bien arteko ebaki-puntuak ere kontuan hartu behar dira (hau da, baldintza biak batera egiaztatzen dituztenak): $x^2+y^2+z^2=4 \wedge z=1$.
Bi baldintza hauek espazioko C kurba definitzen dute (marrazkian marra lodi gorria).

Beraz, $C\equiv\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\ z=1\end{cases}\equiv\begin{cases}x^2+y^2=3\\ z=1\end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x,y,1)=x+y+5=F(x,y)$ eta

$x^2+y^2=3$ baldintza dugu. Berriro ere Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliz:

$$w(x,y)=x+y+5+\lambda(x^2+y^2-3)$$

$$\left.\begin{cases} \left.\begin{array}{l} w'_x=1+2\lambda x=0 \Leftrightarrow \lambda \overset{(*)}{=}-\dfrac{1}{2x} \\ w'_y=1+2\lambda y=0 \Leftrightarrow \lambda \overset{(*)}{=}-\dfrac{1}{2x} \end{array}\right\rangle \Rightarrow x=y \\ x^2+y^2=3 \end{cases}\right\rangle \Rightarrow 2x^2=3 \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}=y$$

$$\Rightarrow \quad E=\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}},1\right) \text{ eta } F=\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}},1\right)$$

Lortutako puntu kritikoetan f-ren balioak konparatuz:

$$f(A)=-\frac{3}{4} \quad f(B)=\frac{3}{2} \quad f(D)=4-2\sqrt{3} \quad f(E)=5+\sqrt{6} \quad f(F)=5-\sqrt{6}$$

Beraz, A minimo eta E maximo absolutuak dira.

(*) Baldin $x=0 \quad \Rightarrow \quad 1=0\#$

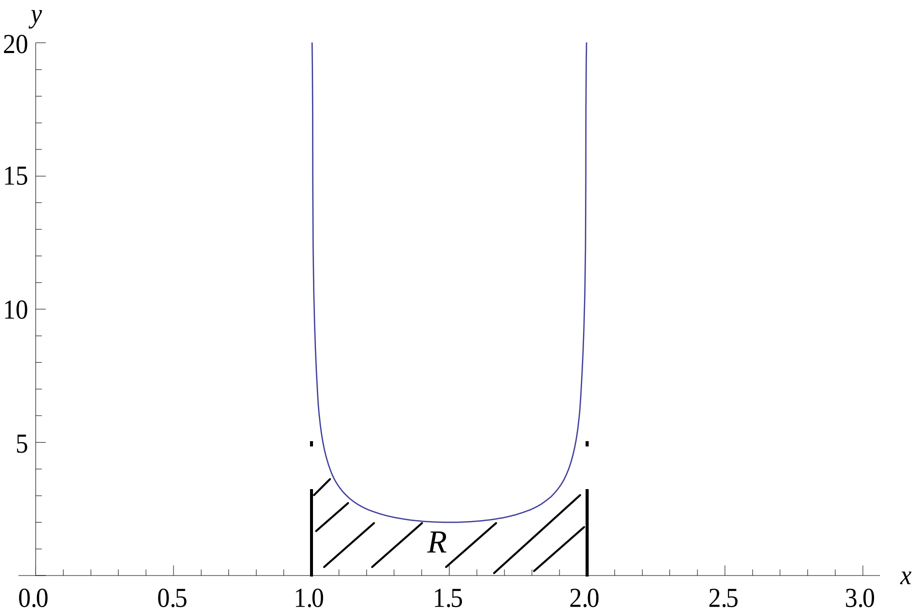
3.- Izan bedi OX ardatzak, $x=1$ eta $x=2$ zuzenek, eta $y=\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$ funtzioak definituriko kurbak mugatzen duten planoko *R* eskualdea.

a) Planteatu eskualde horren azalera emango duen integrala.

b) Erantzun, arrazoituz, ea azalera hori finitua den. (Ez da beharrezkoa kalkulatzea).

(2 puntu)

a)



$$Azalera(R)=\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}\,dx$$

b) Azalera ematen duen integrala inpropioa da bera, azalera finitua da baldin eta soilik baldin integral inpropio konbergentea badugu.

$$Azalera(R)=\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}\,dx=\int_1^2 f(x)dx$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}>0 \quad \forall x\in(1,2)$$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\infty \quad \Rightarrow \quad x=1$ eta $x=2$ puntu singularrak dira. Orduan:

$$Azalera(R)=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^a f(x)dx+\int_a^2 f(x)dx=I_1+I_2 \quad \text{non } 1<a<2$$

I_1 integralaren izaera aztertzeko konparaziozko irizpidea erabiliko dugu, integral eredua

$\int_1^a \frac{1}{(x-1)^m}\,dx \quad (m>0) \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{konbergentea } \forall m<1 \\ \text{dibergentea } \forall m\geq 1 \end{array} \right.$ izanik. Orduan:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{(x-1)^m}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^m}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} \overset{\left(m=\frac{1}{2}<1\right)}{=} 1 \in (0,\infty) \quad \Rightarrow \quad I_1 \text{ konbergentea da.}$$

I_2 integralaren izaera aztertzeko konparaziozko irizpidea erabiliko dugu, integral eredua

$\int_a^2 \frac{1}{(2-x)^m}\,dx \quad (m>0) \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{konbergentea } \forall m<1 \\ \text{dibergentea } \forall m\geq 1 \end{array} \right.$ izanik. Orduan:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)}{\frac{1}{(2-x)^m}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(2-x)^m}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} \overset{\left(m=\frac{1}{2}<1\right)}{=} 1 \in (0,\infty) \quad \Rightarrow \quad I_2 \text{ konbergentea da.}$$

Beraz, integral inpropio konbergentea dugu eta, ondorioz, azalera finitua da.

4.- Adierazi, arrazoituz, zuzenak ala okerrak diren hurrengo adierazpenak:

a) $\frac{d}{dx}\left(\int_x^1 f(t)dt\right) = f(t)$ **.**

b) $\frac{d}{dx}\left(\int_t^1 f(x)dx\right) = 0$ **.**

c) $\frac{d}{dx}\left(\int_x^1 f(x,t)dt\right) = f(x,x) + \int_x^1 f'_x(x,t)dt$ **.**

d) $\frac{d}{dx}\left(\int_1^x f(x,t)dt\right) = f(x,x) + \int_1^x f'_x(x,t)dt$ **.**

(Puntu 1)

a) $\int_x^1 f(t)dt$ integral parametrikoa da, x parametroa delarik. Parametroarekiko deribatuz:

$\frac{d}{dx}\left(\int_x^1 f(t)dt\right) = -f(x) \neq f(t) \quad \Rightarrow$ okerra da.

b) Baldin f integragarria bada eta F bere jatorrizkoa $\Rightarrow$ $\int_t^1 f(x)dx = F(1) - F(t)$ (ez dago, beraz, x-ren mende) $\Rightarrow$ $\frac{d}{dx}\left(\int_t^1 f(x)dx\right) = 0$ zuzena da.

c) $\int_x^1 f(x,t)dt$ integral parametrikoa da, x parametroa delarik. Parametroarekiko deribatuz:

$\frac{d}{dx}\left(\int_x^1 f(x,t)dt\right) = \int_x^1 f'_x(x,t)dt - f(x,x) \neq f(x,x) + \int_x^1 f'_x(x,t)dt \quad \Rightarrow$ okerra da.

d) $\int_1^x f(x,t)dt$ integral parametrikoa da, x parametroa delarik. Parametroarekiko deribatuz:

$\frac{d}{dx}\left(\int_1^x f(x,t)dt\right) = \int_1^x f'_x(x,t)dt + f(x,x)$ zuzena da

.

Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	2. zatia

Azterketa osoaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

5.- Izan bitez $\begin{cases} S_1 \equiv x^2+y^2+z^2=4 \\ S_2 \equiv x^2+y^2=1 \end{cases}$ **gainazalak eta euren arteko *C* ebakidura-kurba,** $z \geq 0$ **izanik.**

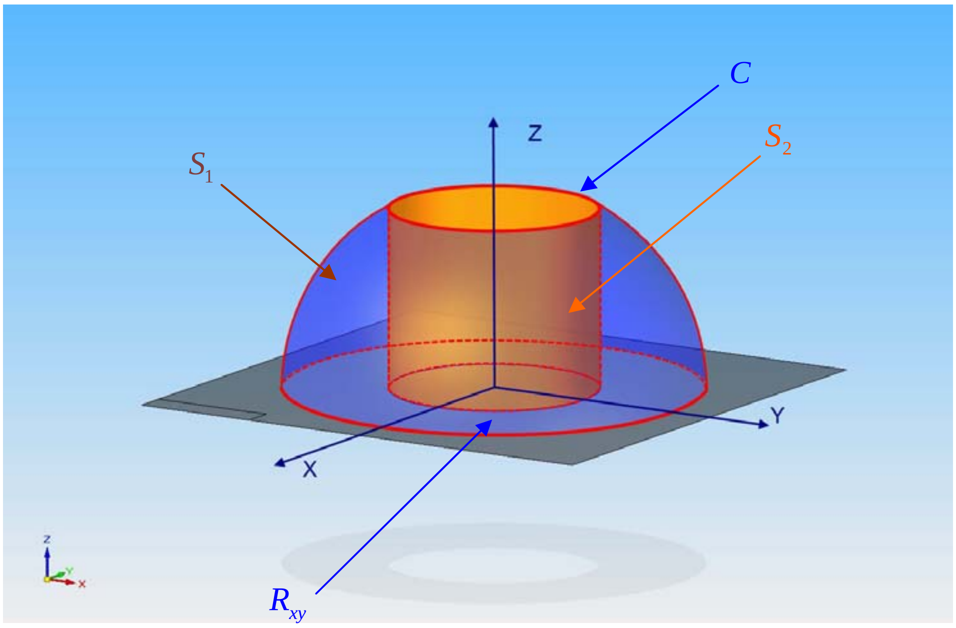
a) Aurkitu $V \equiv \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 4 \\ x^2+y^2 \geq 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$ **solidoaren bolumena.**

b) Aurkitu *V* solidoa mugatzen duen S_1 **gainazalaren zatiaren azalera.**

c) Kalkulatu $\vec{F}(x,y,z) = 2xy\,\vec{i} + x^2\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ **bektorearen zirkulazioa *C* kurban zehar.**

d) Kalkulatu *V* solidoaren mugatik irteten den $\vec{F}$ **bektorearen fluxua.**

(5 puntu)



a) $C \equiv \begin{cases} S_1 \equiv x^2+y^2+z^2=4 \\ S_2 \equiv x^2+y^2=1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=\sqrt{3} \end{cases}$ (esfera eta zilindroa, $z \geq 0$ denean, elkar ebakitzen dute $z=\sqrt{3}$ planoan). Eta XY planoko proiekzioa $R_{xy} \equiv 1 \leq x^2+y^2 \leq 4$

Zilindrikoetan planteatuko dugu:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} \quad |J|=\rho \quad \Rightarrow \quad V \equiv \begin{cases} z \leq \sqrt{4-\rho^2} \\ \rho \geq 1 \\ z \geq 0 \end{cases} \quad \text{eta } R_{xy} \equiv 1 \leq \rho \leq 2 \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{4-\rho^2} \end{cases}$$

Orduan:

$$Bolumena(V) = \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = 2\pi\int_1^2 \rho\sqrt{4-\rho^2}\,d\rho = -\pi \left.\frac{\left(4-\rho^2\right)^{3/2}}{3/2}\right|_1^2 = 2\pi\sqrt{3}$$

b) $S_1 \equiv z=\sqrt{4-x^2-y^2} \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv 1 \leq x^2+y^2 \leq 2 \quad \Rightarrow$

$$Azalera\left(S_1\right) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy$$

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \quad \text{eta } z'_y = \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \quad \Rightarrow \quad 1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2 = \frac{4}{4-x^2-y^2}$$

Orduan:

$$Azalera\left(S_1\right) = \iint_{R_{xy}} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dxdy \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi}\int_1^2 \frac{2\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}\,d\rho\, d\theta = 4\pi\left[-\sqrt{4-\rho^2}\right]_1^2 = 4\pi\sqrt{3}$$

(*) Polarretan $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \quad |J|=\rho \quad \Rightarrow \quad R_{xy} \equiv \left[0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 1 \leq \rho \leq 2\right]$

c) $\vec{F}(x,y,z) = 2xy\,\vec{i} + x^2\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ bektorearen zirkulazioa $C \equiv \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=\sqrt{3} \end{cases}$ kurban zehar hurrengo lerro-integralak ematen digu:

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r} = \oint_C \left(2xy\,dx + x^2\,dy + z\,dz\right)$$

Integral hau bi eratan ebatz daiteke:

i) C kurba parametrizatuz lerro-integrala ebazteko $C \equiv \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \Rightarrow \\ z=\sqrt{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \oint_C \vec{F}d\vec{r} = \oint_C \left(2xy\,dx + x^2\,dy + z\,dz\right) = \int_0^{2\pi} \left(-2\cos^2 t\sin t + \cos^2 t\cos t\right)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-2\cos^2 t\sin t + \cos t - \sin^2 t\cos t\right)dt = \left[\frac{2}{3}\cos^3 t + \sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = 0$$

ii) C kurba itxi eta leuna denez, Stokes-en teorema aplñikatuz:

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}d\vec{S}$$

non $S \equiv z = \sqrt{3} \quad \forall (x,y)/\,x^2 + y^2 \le 1$ (C kurbak mugaturiko gainazala).

Eta $\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} = (0-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (2x-2x)\vec{k} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \oint_C \vec{F}d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}d\vec{S} = 0$

d) Izan bedi S gainazal itxia (V solidoaren muga).

$$\Phi_S\left(\vec{F}\right) = \iint_S \vec{F}d\vec{S} = \iint_S \left(2xy\,dydz + x^2\,dzdx + z\,dxdy\right)$$

Eta S zatika leuna denez (S_1, S_2 eta $z=0$ zatiz osaturikoa), zati bakoitzari dagokion gainazal-integrala kalkulatu beharko genuke). Hori beharrean, Gauss-en teorema erabiliz:

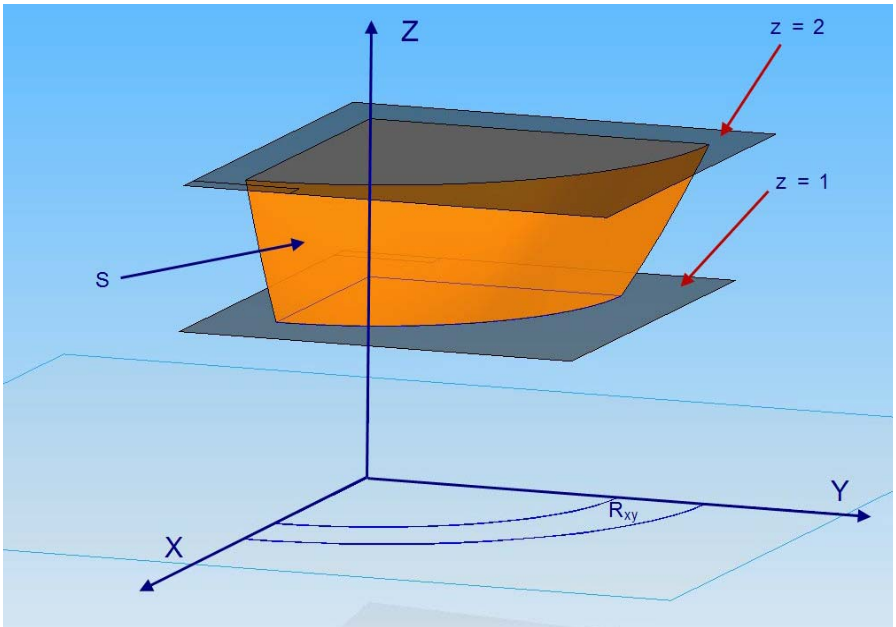
$$\Phi_S\left(\vec{F}\right) = \iint_S \vec{F}d\vec{S} = \iiint_V div\left(\vec{F}\right)dxdydz = \iiint_V (2y+1)dxdydz \overset{(1)}{=} \iiint_V dxdydz \overset{(2)}{=} 2\pi\sqrt{3}$$

(1) V solidoa simetrikoa da XZ planoarekiko eta y funtzio bakoitia denez, orduan $\iiint_V 2y\,dxdydz = 0$

(2) V-ren bolumena da, a) atalean kalkulatutakoa.

6.-Izan bedi S gainazala $z = x^2 + y^2$ paraboloidearen zatia, lehenengo oktantean $z = 1$ eta $z = 2$ planoen artean mugaturikoa. Aurkitu $\vec{F}(x, y, z) = 2y\,\vec{i} + 2x\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ bektorearen fluxua S gainazalean zehar.

(2 puntu)



$$\Phi_S\left(\vec{F}\right) = \iint_S \vec{F}d\vec{S} = \iint_S \left(2y\,dydz + 2x\,dzdx + z\,dxdy\right)$$

non $S \equiv z = x^2 + y^2 \quad \forall (x, y) \in R_{xy} \equiv 1 \le x^2 + y^2 \le 2$. Beraz:

$$\Phi_S\left(\vec{F}\right) = \pm \iint_{R_{xy}} \left(\vec{F} \cdot \vec{N}\right) dxdy$$

Eta $\vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (-2x, -2y, 1) \quad \Rightarrow \quad \vec{F} \cdot \vec{N} = -4xy - 4xy + x^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 8xy$

Orduan, polarretan planteatzuz:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad R_{xy} \equiv \left[0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad 1 \le \rho \le \sqrt{2}\right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_S\left(\vec{F}\right) \overset{\left(\substack{\gamma > \frac{\pi}{2} \\ \downarrow}\right)}{=} -\iint_{R_{xy}} \left(x^2 + y^2 - 8xy\right) dxdy \overset{(*)}{=} -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sqrt{2}} \rho\left(\rho^2 - 8\rho^2 \cos\theta\sin\theta\right) d\rho\, d\theta =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sqrt{2}} \rho^3 \left(1 - 8\cos\theta\sin\theta\right) d\rho\, d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_1^{\sqrt{2}} \cdot \left(1 - 8\cos\theta\sin\theta\right) d\theta =$$

$$= -\frac{3}{4}\left[\theta - 4\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{4}\left[\frac{\pi}{2} - 4\right] = 3\left(1 - \frac{\pi}{8}\right)$$

7.- Ikasle batek $z=0$ planoan kokaturiko *R* eskualde itxi eta mugatuarena azalera kalkulatu behar du. Eskualdearen muga *C* kurba itxi, sinple eta leuna da. Ikaslea ez da integral bikoitzei buruzko klaseetara joan, baina bai, ordea, lerro-integralei buruzkoetara. *R* eskualdearen azalera kalkula lezake lerro-integralik erabiliz? Zein lerro-integral plantea lezake? Zer aplikatuko luke?

Aurrekoa aplikatuz, kalkulatu $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ elipseak mugatzen duen eskualdearen azalera lerro-integrala erabiliz.

(2 puntu)

$$Azalera(R)=\iint_R dxdy$$

Baina ikasleak ez dakienez integral bikoitzak ebazten eta bai, ordea, lerro-integralak, bi integral hauek erlazionatzen dituen teoremaz baliatuko gara. Green-en teoremaz hain zuzen ere:

Izan bedi *C* kurba itxi, sinple, leuna edo zatika leuna *R* eskualdea mugatzen duena, biak $D\subseteq\mathbb{R}^2$ eremuan definiturikoak. Baldin eremu horretan *X*, *Y* eta euren lehenengo deribatu partzialak jarraituak badira, orduan

$$\iint_R\left(Y'_x-X'_y\right)dxdy=\oint_C\left(Xdx+Ydy\right)$$

Kasu honetan $Y'_x-X'_y=1 \quad\Rightarrow\quad X=y$ eta $Y=2x$ aukeratuz (aukera anitza daude):

$$Azalera(R)=\iint_R dxdy=\oint_C(ydx+2xdy)$$

Emaitza hau $C\equiv\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ kurbak mugatzen duen eskualdearen azalera kalkulatzeko erabiliko dugu. Parametrizatuko dugu:

$$C\equiv\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1\equiv\begin{cases}x=2\cos t\\ y=3\sin t\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi \quad\Rightarrow$$

$$Azalera(R)=\iint_R dxdy=\oint_C(ydx+2xdy)=\int_0^{2\pi}\left(-6\sin^2 t+12\cos^2 t\right)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-3(1-\cos(2t))+6(1+\cos(2t))\right)dt=\int_0^{2\pi}\left[3+9\cos(2t)\right]dt=\left[3t+\frac{9\sin(2t)}{2}\right]_0^{2\pi}=6\pi$$