Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	1. zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Izan bedi $F(x,y) = xy^2 + ax^2 + by = 0$ ekuazioa.

a) Aurkitu *a* eta *b* parametroen balioak, $P(1,2)$ puntuaren ingurune batean ekuazio horrek $y = y(x)$ funtzioa defini dezan eta ez, ordea, $x = x(y)$.

b) Estudiatu ea $y = y(x)$ funtzio horrek mutur erlatiborik duen $x = 1$ puntuan eta, baiezko kasuan, aztertu zein motatako muturra den.

(2 puntu)

a) Funtzio inplizituaren teorema aplikatuko diogu emandako ekuazioari:

i. $F(P) = 4 + a + 2b = 0$

ii. $\begin{cases} F'_x = y^2 + 2ax \\ F'_y = 2xy + b \end{cases}$ existitzen eta jarraituak dira $P(1,2)$ puntuaren ingurune batean.

iii. $\begin{cases} F'_x(P) = 4 + 2a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -2 \quad \overset{(i)}{\Rightarrow} \quad b = -1 \\ F'_y(P) = 4 + b = 4 - 1 = 3 \neq 0 \end{cases}$

Beraz, $a = -2$ eta $b = -1$ balioetarako, $P(1,2)$ puntuaren ingurune batean $\exists!\, y = y(x)$ funtzio diferentziagarria non $y(1) = 2$, eta $\nexists\, x = x(y)$.

b) $a = -2$ eta $b = -1$ balioak ordezkatuz, $F(x, y(x)) = xy^2 - 2x^2 - y = 0$ ekuazioa dugu orain. Horretan *x*-rekiko deribatuz eta *P* puntuan ordezkatuz:

$$y^2 - 4x + (2xy - 1)\cdot y' = 0 \quad \overset{P}{\Rightarrow} \quad y'(1) = 0$$

Beraz, $x = 1$ puntuan $y = y(x)$ funtzioak puntu kritikoa du.

Aurreko emaitzan berriro *x*-rekiko deribatuz eta *P* puntuan ordezkatuz:

$$2y\cdot y' - 4 + (2y + 2x\cdot y')\cdot y' + (2xy - 1)\cdot y'' = 0 \quad \overset{P}{\Rightarrow} \quad y''(1) = \frac{4}{3} > 0$$

Beraz, $x = 1$ puntuan $y = y(x)$ funtzioak minimo erlatiboa du.

2.- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **elipsoideak mugaturiko solidoaren bolumena** $B=\frac{4\pi}{3}abc$ **dela jakinda, aurkitu *a, b* eta *c*, bolumen hori maximoa izateko eta** $a+b+c=3$ **bete dadin.**

(2 puntu)

$B=B(a,b,c)=\frac{4\pi}{3}abc$ funtzioaren maximoa kalkulatu behar dugu $a+b+c=3$ baldintzarekin. Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliko dugu. Beraz, izan bedi:

$$w(a,b,c)=\frac{4\pi}{3}abc+\lambda\cdot\left(a+b+c-3\right)$$

Eta kalkula ditzagun bere puntu kritikoak:

$$\left.\begin{cases}\left.\begin{array}{l} w'_a=\frac{4\pi}{3}bc+\lambda \\ w'_b=\frac{4\pi}{3}ac+\lambda \\ w'_c=\frac{4\pi}{3}ab+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lambda=-\frac{4\pi}{3}bc=-\frac{4\pi}{3}ac=-\frac{4\pi}{3}ab \quad \Leftrightarrow \quad a=b=c \\ a+b+c=3 \end{cases}\right\} \Rightarrow a=b=c=1$$

Puntu kritiko bakarra lortu dugu, $P(a,b,c)=(1,1,1)$. Froga dezagun maximoa dela:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} w''_{a^2}=w''_{b^2}=w''_{c^2}=0 \\ w''_{ab}=\frac{4\pi}{3}c \\ w''_{ac}=\frac{4\pi}{3}b \\ w''_{bc}=\frac{4\pi}{3}a \end{array}\right\} \Rightarrow \quad d^2w(P)=\frac{8\pi}{3}\left(da\cdot db+da\cdot dc+db\cdot dc\right) \\ a+b+c=3 \quad \Rightarrow \quad da+db+dc=0 \quad \Rightarrow \quad dc=-da-db \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$d^2w(P)=\frac{8\pi}{3}\left(da\cdot db+da\cdot dc+db\cdot dc\right)=\frac{8\pi}{3}\left(da\cdot db-(da)^2-da\cdot db-da\cdot db-(db)^2\right)=$$

$$=-\frac{8\pi}{3}\left((da)^2+da\cdot db+(db)^2\right)=-\frac{8\pi}{3}\left[\left(da+\frac{db}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(db)^2\right]<0$$

Beraz, $a=b=c=1$ balioetarako, $a+b+c=3$ baldintza egiaztatzen da eta $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ elipsoideak ($x^2+y^2+z^2=1$ esferak, hain zuzen ere) mugaturiko bolumena maximoa da.

3.- Estudiatu $\forall a > 0$, $\int_1^{\infty} a^{-x}\,dx$ integralaren izaera.

(2 puntu)

$I = \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ non $f(x) = a^{-x} > 0 \quad \forall x \in [1, \infty)$.

Integral inpropioa da, ∞ puntu singular bakarra izanik.

Konbergentziarako *baldintza beharrezkoa* aplikatzen hasiko gara:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} a^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{a^x} = \begin{cases} 0 & \forall a > 1 \\ 1 & \text{baldin } a = 1 \\ \infty & \forall a < 1 \end{cases}$$

Orduan $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > 1$.

Beraz, $\forall a \le 1$ $\int_1^{\infty} a^{-x}\,dx$ dibergentea da.

$\forall a > 1$ *konparaziozko irizpidea* aplikatuko dugu. Integral eredua honako hau da:

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^m} \begin{cases} \text{konbergentea } \forall m > 1 \\ \text{dibergentea } \forall m \le 1 \end{cases}$$

Orduan: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{x^m}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^m}{a^x} = 0 \quad \forall a > 1$ eta $\forall m > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Baita $\forall m > 1$ ere.

Beraz, $\forall a > 1$ $\int_1^{\infty} a^{-x}\,dx$ konbergentea da.

4.- Erantzun arrazoituz hurrengo galderak.

a) Izan bitez $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eremuan definituriko $f = f(x,y)$ funtzio jarraitua eta $C \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $h \le t \le k$, kurba leuna.

i. Baldin $\int_h^k f(x(t),y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = 4$, zenbat balio du $\int_k^h f(x(t),y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$ integralak?

ii. Baldin $\int_h^k f(x(t),y(t)) \cdot x'(t)\, dt = 1$, zenbat balio du $\int_k^h f(x(t),y(t)) \cdot x'(t)\, dt$ integralak?

b) Izan bedi $S \equiv z = z(x,y) \quad \forall (x,y) \in R_{xy}$, gainazal leuna eta orientagarria. Baldin bere bektore normala $\vec{N} = (1,2,-2)$ bada eta R_{xy} eskualdearen azalerak 1 balio badu:

i. Kalkulatu *S* gainazalaren azalera.

ii. Kalkulatu $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ non $\vec{F}(x,y,z) = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

(2 puntu)

a) i. Arku-luzerarekiko definituriko integrala da beraz, definizioz:

$$\int_k^h f(x(t),y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_h^k f(x(t),y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = 4$$

ii. x aldagairekiko definituriko integrala da beraz, definizioz:

$$\int_k^h f(x(t),y(t)) \cdot x'(t)\, dt = -\int_h^k f(x(t),y(t)) \cdot x'(t)\, dt = -1$$

b) i. $S \equiv z = z(x,y) \quad \forall (x,y) \in R_{xy}$ izanik, bektore normala $\vec{N} = \left(-z'_x, -z'_y, 1\right)$ erara definitzen da. Beraz, emandakoa $\vec{N} = \left(-\frac{1}{2}, -1, 1\right)$ bihurtzen zaigu. Eta honela:

$$Azalera\ (S) = \iint_S dS = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2} \cdot dxdy = \iint_{R_{xy}} \sqrt{2 + \frac{1}{4}} \cdot dxdy = \frac{3}{2} \cdot \iint_{R_{xy}} dxdy = \frac{3}{2}$$

ii. $$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \left(\vec{F} \cdot \vec{n}\right) \cdot dS = \pm \iint_S \left(\vec{F} \cdot \frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}\right) \cdot dS = \pm \iint_S -\frac{5}{3} \cdot dS = \pm \frac{5}{3} \iint_S dS$$

$$= \pm \frac{5}{3} \cdot Azalera(S) = \pm \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} = \pm \frac{5}{2}$$

<u>Oharra</u>: $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	2. zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

5.- Izan bedi f **jarraitua** $[1,5]$ **tartean eta defini dezagun** $F(x)=\int_1^5 f(y)\cdot|x-y|\,dy$**.**
Aurkitu $F''(x)\ \ \forall x<1$**.**

(1 puntu)

Integral parametrikoa dugu, x parametroa delarik.

$$\forall x<1\le y\le 5 \quad \Rightarrow \quad F(x)=\int_1^5 f(y)\cdot|x-y|\,dy=\int_1^5 f(y)\cdot(y-x)\,dy$$

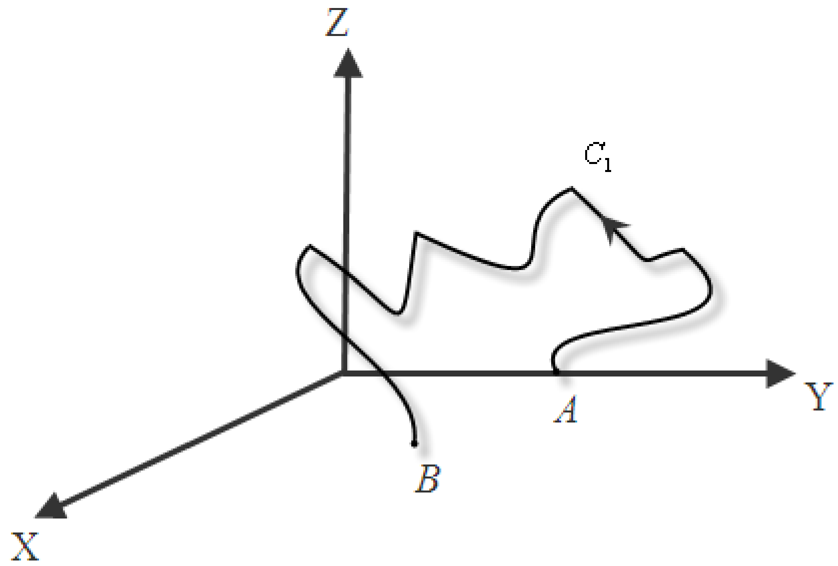
x parametroarekiko deribatuz:

$$F'(x)=\int_1^5 -f(y)\,dy \quad \Rightarrow \quad F''(x)=0$$

6.- Izan bedi $\vec{F}(x,y,z) = y\,e^z \cdot \vec{i} + x\,e^z \cdot \vec{j} + xy\,e^z \cdot \vec{k}$ eremu bektoriala.

a) Kalkulatu $\vec{F}$ -ren zirkulazioa espazioko *C* kurba leuna, edo zatika leuna, eta itxian zehar, *S* gainazal orientagarriaren muga dena.

b) Kalkulatu $\vec{F}$ -ren lerro-integrala marrazkian erakusten den espazioko C_1 kurban zehar, $A(0,3,0)$ puntutik, $B(1,2,0)$ puntura.



(2 puntu)

a) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \overset{Stokes}{=} \iint_S \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} \cdot d\vec{S} \overset{(*)}{=} 0$

(*) $\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} = \left(x\,e^z - x\,e^z\right) \cdot \vec{i} + \left(y\,e^z - y\,e^z\right) \cdot \vec{j} + \left(e^z - e^z\right) \cdot \vec{k} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ bidearekiko independentea da.

Beraz, izan bedi $A(0,3,0)$ puntutik, $B(1,2,0)$ puntura doan bide zuzena:

$$C_2 \equiv \overline{AB} = \begin{cases} y = 3 - x \\ z = 0 \end{cases} \quad 0 \le x \le 1 .$$

Orduan:

$$\int_{C_1(A\to B)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2(A\to B)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2(A\to B)} \left(y\,e^z \cdot dx + x\,e^z \cdot dy + xy\,e^z \cdot dz\right) =$$

$$= \int_0^1 (3 - x - x)dx = 3x - x^2 \Big]_0^1 = 2$$

7.- Izan bitez $\begin{cases} S_1 \equiv z = \sqrt{x^2+y^2} \\ S_2 \equiv z = 2-(x^2+y^2) \end{cases}$ **gainazalak eta *C*, euren arteko ebakidura-kurba.**

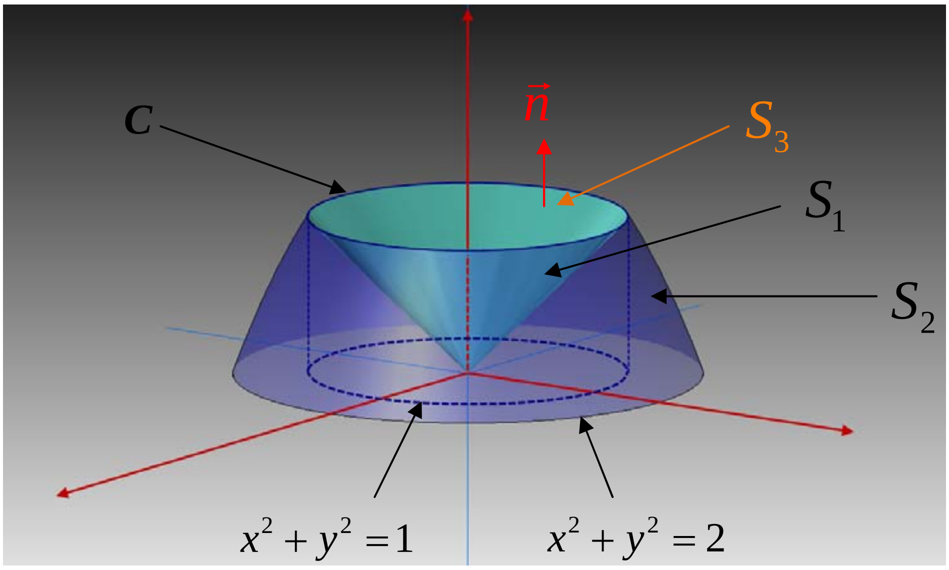
a) Aurkitu S_1 gainazalaren kanpotik, S_2 gainazalaren barrutik eta azpitik $z=0$ planoak mugaturiko *V* solidoaren bolumena.

b) Kalkulatu $\vec{F}(x,y,z)=(x+y)\cdot\vec{i}+(2x-z)\cdot\vec{j}+(y+z)\cdot\vec{k}$ **bektorearen zirkulazioa *C* kurban zehar.**

c) Izan bedi *S* gainazal itxia, a) atalean definituriko *V* solidoaren muga. Kalkulatu gainazal horretatik irteten den fluxua $\vec{F}$ bektorearen eraginez.

d) Kalkulatu *S* gainazal itxia osatzen duen S_2 gainazalaren zatiaren azalera.

(4 puntu)



$$\begin{cases} S_1 \equiv z = \sqrt{x^2+y^2} \\ S_2 \equiv z = 2-(x^2+y^2) \end{cases} \Rightarrow \quad z=2-z^2 \quad \Leftrightarrow \quad z^2+z-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad z=\begin{cases} 1 \\ -2<0 \quad \# \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C \equiv \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$$

a) Zilindrikoetan: $\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\theta \\ y=\rho\cdot\sin\theta \\ z=z \end{cases} \quad |J|=\rho \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S_1 \equiv z=\rho \\ S_2 \equiv z=2-\rho^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le z\le 1 \\ z\le\rho\le\sqrt{2-z} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad Bolumena(V)=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_z^{\sqrt{2-z}} \rho\, d\rho\, dz\, d\theta = 2\pi\int_0^1 \frac{2-z-z^2}{2}dz = \pi\left[2z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$=\pi\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{7\pi}{6}$$

b) Bi eratan egin daiteke:

1. erara: Lerro-integrala ebatziz. $C \equiv \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \quad 0\le t\le 2\pi \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C \left[(x+y)\cdot dx + (2x-z)\cdot dy + (y+z)\cdot dz\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-(\cos t+\sin t)\cdot \sin t + (2\cos t - 1)\cdot \cos t\right] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\cos t\cdot\sin t - \frac{1-\cos(2t)}{2} + 1 + \cos(2t) - \cos t\right] dt =$$

$$= \left.\frac{\cos^2 t}{2} - \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + t + \frac{\sin(2t)}{2} - \sin t\right]_0^{2\pi} = \pi$$

2. erara: Stokes-en teorema erabiliz.

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{S_3} \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_3}\left(2dydz + 0dzdx + dxdy\right) \overset{(1)}{=} \pm\iint_{R_{xy}} dxdy \overset{(2)}{=} \iint_{R_{xy}} dxdy \overset{(3)}{=} \pi$$

(1) $S_3 \equiv z=1 \quad \forall (x,y)\in R_{xy} \equiv x^2+y^2\le 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}=(0,0,1)$

(2) $\gamma < \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow$ integralari zeinu positiboa dagokio.

(3) $R_{xy} \equiv x^2+y^2 \le 1 \quad \Rightarrow \quad \iint_{R_{xy}} dxdy = Azalera\left(R_{xy}\right) = \pi$

c) S gainazal zatika leuna eta itxia denez, Gauss-en teorema erabil daiteke:

$$\Phi_S\left(\vec{F}\right) = \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V div\left(\vec{F}\right) dxdydz = 2\iiint_V dxdydz = 2\cdot Bolumena(V) = \frac{7\pi}{3}$$

d) $Azalera\left(S_2\right) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\cdot dxdy = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}\cdot dxdy$

non $S_2 \equiv z = 2-(x^2+y^2) \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \left(-z'_x, -z'_y, 1\right) = (-2x,-2y,1)$

Eta $R_{xy} \equiv 1 \le x^2+y^2 \le 2$.

Polarretan: $\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\theta \\ y=\rho\cdot\sin\theta \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 1\le\rho\le\sqrt{2} \end{cases} \quad \Rightarrow$

$$Azalera\left(S_2\right) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}\cdot dxdy = \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} \rho\sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho d\theta = 2\pi \left.\frac{\left(1+4\rho^2\right)^{3/2}}{3/2}\cdot\frac{1}{8}\right]_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(9^{3/2} - 5^{3/2}\right) = \frac{\pi}{6}\left(27 - 5\sqrt{5}\right)$$