Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Guztira

Azterketaren iraupena: Ordu 1 eta erdi

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Izan bitez bi funtzio jarraitu deribatu jarraituekin, $F:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eta $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, non $f(0)=0$ eta $f'(0)=-1$. Funtzio berria definituko dugu, $G:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, hurrengo erara:

$$G(x,y)=F\left(e^x+e^y, f(x+y)\right)$$

a) Zein da (2,0) puntuan F-ren lehenengo deribatu partzialen arteko erlazioa, G funtzioak puntu kritikoa izan dezan (0,0) puntuan?

b) Baldin F-ren lehenengo deribatu partzialen balioak (2,0) puntuan, hurrenez hurren, 1 eta -1 badira, zein norabidetan izaten da G funtzioaren aldakuntza maximoa (0,0) puntuan? Eta aldakuntza minimoa?

(3.5 puntu)

a) G funtzioak puntu kritikoa du (0,0) puntuan $\Leftrightarrow \begin{cases} G'_x(0,0)=0 \\ G'_y(0,0)=0 \end{cases}$

$$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\rangle G = F\left\langle \begin{matrix} u\left\langle\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right. \\ f-t\left\langle\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.\end{matrix}\right.$$

non $u=e^x+e^y$ eta $t=x+y$.

$$G'_x = F'_u \cdot u'_x + F'_f \cdot f' \cdot t'_x = F'_u \cdot e^x + F'_f \cdot f'$$
$$G'_y = F'_u \cdot u'_y + F'_f \cdot f' \cdot t'_y = F'_u \cdot e^y + F'_f \cdot f'$$

Orduan:

$$G'_x(0,0)=F'_u(2,0)+F'_f(2,0)\cdot f'(0)=F'_u(2,0)-F'_f(2,0)=0 \Leftrightarrow F'_u(2,0)=F'_f(2,0)$$
$$G'_y(0,0)=F'_u(2,0)+F'_f(2,0)\cdot f'(0)=F'_u(2,0)-F'_f(2,0)=0 \Leftrightarrow F'_u(2,0)=F'_f(2,0)$$

b) G funtzioaren aldakuntza maximoa (0,0) puntuan gradientearen norabidean suertatzen da:

$$\overrightarrow{\nabla G}(0,0)=G'_x(0,0)\cdot\vec{i}+G'_y(0,0)\cdot\vec{j}=\left(F'_u(2,0)-F'_f(2,0)\right)\cdot\vec{i}+\left(F'_u(2,0)-F'_f(2,0)\right)\cdot\vec{j}=2\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}$$

Eta aldakuntza minimoa gradientearekiko norabide elkartzutan izango da, (-1,1) alegia.

2.- $\begin{cases} F(x,y,u,v) = ux^3 + vy^3 - 1 = 0 \\ G(x,y,u,v) = ye^x - 2uv^3 - 1 = 0 \end{cases}$ sistema eta $P(0,1,A,B)$ puntua emanik, honako hau eskatzen da:

a) Aurkitu A eta B konstanteen balioak, aurreko sistemak x eta y aldagaiko u eta v funtzio inplizituak defini ditzan P puntuaren ingurune batean, $u = u(x,y)$ eta $v = v(x,y)$ alegia.

b) Kalkulatu (0,1) puntuan, u eta v funtzioen aldakuntza maximoaren norabideek osaturiko angeluak OX^+ ardatzarekin. Puntu horretan zeinek izan du aldakuntza handiagoa, u edo v funtzioak?

(3.5 puntu)

a) i) $\begin{cases} F(0,1,A,B) = B - 1 = 0 \Leftrightarrow B = 1 \\ G(0,1,A,B) = 1 - 2AB^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow A \cdot B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 0$

ii)

$$\begin{matrix} F'_x = 3ux^2 & F'_y = 3vy^2 & F'_u = x^3 & F'_v = y^3 \\ G'_x = ye^x & G'_y = e^x & G'_u = -2v^3 & G'_v = -6uv^2 \end{matrix}$$ jarraituak $\mathbb{R}^4$ osoan.

iii) $\left|\dfrac{D(F,G)}{D(u,v)}\right|_P = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

Beraz, $\exists \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ diferentziagarriak (0,1) puntuaren ingurunean eta $\begin{cases} u(0,1) = 0 \\ v(0,1) = 1 \end{cases}$ izanik.

b) Kalkulatu behar ditugu u eta v funtzioen gradienteek osaturiko angeluak OX^+ ardatzarekin (α). Horretarako, emandako sisteman x-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} 3ux^2 + x^3 \cdot u'_x + y^3 \cdot v'_x = 0 \\ ye^x - 2v^3 \cdot u'_x - 6uv^2 \cdot v'_x = 0 \end{cases}$$

eta P(0,1,01) puntuan ordezkatuz:^

$$\begin{cases} v'_x(0,1) = 0 \\ 1 - 2 \cdot u'_x(0,1) = 0 \Leftrightarrow u'_x(0,1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Era berean, y aldagaiarekin:

$$\begin{cases} 3vy^2 + x^3 \cdot u'_y + y^3 \cdot v'_y = 0 \\ e^x - 2v^3 \cdot u'_y - 6uv^2 \cdot v'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + v'_y(0,1) = 0 \\ 1 - 2 \cdot u'_y(0,1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v'_y(0,1) = -3 \\ u'_y(0,1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Beraz,

$$\overrightarrow{\nabla u}(0,1) = \frac{1}{2} \cdot \vec{i} + \frac{1}{2} \cdot \vec{j} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \qquad \text{eta} \qquad \overrightarrow{\nabla v}(0,1) = -3 \cdot \vec{j} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2}$$

Funtzio hauen aldakuntza, berriz, euren gradienteen moduluek adierazten digute:

$$\left|\overrightarrow{\nabla u}(0,1)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{eta} \qquad \left|\overrightarrow{\nabla v}(0,1)\right| = 3$$

Hortaz, v-ren aldakuntza u-rena baino handiagoa izan da.

3.- Aurkitu $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$ elipsearen puntuak zeinetarako koordenatu-jatorriarekiko distantzia maximoa eta minimoa den, hurrenez hurren.

(3 puntu)

$d(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ funtzioaren maximoa eta minimoa kalkulatu behar ditugu, non (x,y,z) emandako elipsearen puntuak diren, beraz, baldintza bi egiaztatu behar dituzten maximo eta minimo izango dira: $\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$.

Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliz:

$$w(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - z) + \mu \cdot (x + y + 2z - 2)$$

Baina $d(x,y,z) = g \circ f(x,y,z)$, non $g(x) = \sqrt{x}$. Eta $g'(x) > 0 \Rightarrow g$ eta d funtzioek mutur berdinak dituzte. Beraz, g-renak kalkulatuko ditugu:

$$w(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - z) + \mu \cdot (x + y + 2z - 2)$$

Puntu kritikoak lortzeko baldintza beharrezkoa planteatuko dugu:

$$\begin{cases} w'_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ w'_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ w'_z = 2z - \lambda + 2\mu = 0 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

Lehenengo ekuazio bien arteko kenketa kalkulatuz: $2(x-y)(1+\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ \lambda = -1 \end{cases}$

Baldin $y = x \Rightarrow \begin{cases} z = 2x^2 \\ 2x + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \Rightarrow y = 1/2 \text{ eta } z = 1/2 \\ x = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ eta } z = 2 \end{cases}$

Baldin $\lambda = -1 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow z = -\dfrac{1}{2} = x^2 + y^2$, ezinezkoa dena.

Beraz, bi puntu kritiko atera zaizkigu: $A\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ eta $B(-1,-1,2)$.

Orain arte mutur erlatibo baldintzatuez hitz egin badugu ere, multzo itxi eta bornatuan kokaturiko muturrak direnez (elipsean hain zuzen ere), mutur absolutuak izango dira, euren existentzia Weierstrass-en teoremak ziurtatzen duena. Beraz, ez diegu baldintza nahikoa aplikatu beharrik. Bi puntu kritiko hauetarako d funtzioak hartutako balioak besterik ez ditugu kalkulatu behar:

$$d(A) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{eta} \qquad d(B) = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{6}$$

Eta balio biak konparatuz: $d(A) < d(B) \Rightarrow A$ puntura distantzia minimoa dago eta B puntura distantzia maximoa.