Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Guztira

Azterketaren iraupena: 2 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Leku handi ilun batean hiru gazte eta munstro bat daude. Hiru gazteek munstroa non dagoen jakiteko tresna bana daukate. Tresna horrek munstrotik ateratako tenperatura hurrengo funtzioaren bidez ematen du:

$$T(x,y) = 128x + 12y - 8x^2 - y^2 + 27$$

Baldin gazteak $A(1,6)$, $B(8,-2)$ eta $C(10,2)$ puntuetan badaude, norantz abiatuko dira, munstroaren elikagai kutunenak gazteak direla badakite?

(2.5 puntu)

Gazteek $-\overrightarrow{\nabla T}$ norabidean ihes egin beharko lukete, tenperatura ahalik eta arinen jaisten den norabidean alegia.

$$T'_x = 128 - 16x \quad \Rightarrow \quad T'_x(A) = 112 \quad T'_x(B) = 0 \quad T'_x(C) = -32$$
$$T'_y = 12 - 2y \quad \Rightarrow \quad T'_y(A) = 0 \quad T'_y(B) = 16 \quad T'_y(C) = 8$$

Orduan, bakoitzari dagokion ihes egiteko bidea bektore hauen bitartez adierazten da:

$$A \Rightarrow -112\,\vec{i} \qquad B \Rightarrow -16\,\vec{j} \qquad C \Rightarrow 32\,\vec{i} - 8\,\vec{j}$$

2.- $x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{y}\right) - y \cdot z^2 + 1 = 0$ ekuazioa emanik:

a) Egiaztatu x eta y aldagaiko z funtzio inplizitua, $z = z(x, y)$, definitzen duela $P(x, y, z) = P(1, 2, 1)$ puntuaren ingurune batean.

b) Demagun $z = z(x, y)$ funtzioaren adierazpide grafikoak mendi baten gainazala adierazten duela, non $z > 0$. Aurkitu, P puntuan, bide baten altueraren aldakuntzaren abiadura, bide horren proiekzioaren ekuazioa $y = x^2 + 1$ izanik.

(2.5 puntu)

a) Izan bedi $F(x, y, z) = x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{y}\right) - y \cdot z^2 + 1 = 0$ ekuazioa.

i) $F(P) = 0$

ii) $F'_x = \sin\left(\frac{\pi}{y}\right)$

$F'_y = -\frac{x\pi}{y^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{y}\right) - z^2$, jarraituak dira P puntuaren ingurunean non $y \neq 0$.

$F'_z = -2yz$

iii) $F'_z(P) = -4 \neq 0$

Beraz, $(1, 2)$ puntuaren ingurune batean $\exists! z = z(x, y)$ diferentziagarria non $z(1, 2) = 1$.

b) Kalkulatu behar dugu $\left.\frac{dz}{d\vec{u}}\right|_P = z'_x(P) \cdot h_1 + z'_y(P) \cdot h_2$, non $\vec{u} = (h_1, h_2)$ bektore unitarioak bidearen norabidea adierazten digun.

$y = x^2 + 1$ parabolaren malda: $y' = 2x \quad \Rightarrow \quad y'(1) = 2$

Beraz, bidearen norabide bektorea (bektore ukitzailea, alegia) $(1, 2)$ izan daiteke eta unitario bihurtuz:

$$\vec{u} = (h_1, h_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Orduan, $F(x, y, z(x, y)) = 0$ ekuazioan *x*-rekiko deribatuz:

$$\sin\left(\frac{\pi}{y}\right) - 2yz \cdot z'_x = 0 \quad \rightarrow \quad z'_x(P) = \frac{1}{4}$$

Era berean, *y*-rekiko deribatuz:

$$-\frac{x\pi}{y^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{y}\right) - z^2 - 2yz \cdot z'_y = 0 \quad \rightarrow \quad z'_y(P) = \frac{-1}{4}$$

Beraz, $\left.\frac{dz}{d\vec{u}}\right|_P = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{4\sqrt{5}}$

3.- $z = z(x,y) = 7 \cdot y^2 \cdot f\left[g(x^2, xy) + h(y^2)\right]$ funtzioa emanik, non $g(0,0) = 1$, $\overrightarrow{\nabla g}(0,0) = (1,-2)$, $h(1) = h'(1) = 1$ eta $f(2) = 2$, kalkulatu $z'_x(0,1) + z'_y(0,1)$.

(2.5 puntu)

$$z(x,y) = 7 \cdot y^2 \cdot f(u) \quad \text{non} \quad u = g(v,w) + h(t) \quad \text{eta} \quad \begin{cases} v = x^2 \\ w = xy \\ t = y^2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\rangle z = 7y^2 \cdot f - u \left\langle \begin{matrix} g \left\langle \begin{matrix} v - x \\ w \left\langle \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right. \end{matrix} \right. \\ h - t - y \end{matrix} \right.$$

Emandako datuen arabera, $(x,y) = (0,1) \Rightarrow \begin{cases} (v,w) = (0,0) \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow u = g(0,0) + h(1) = 2$

Eta $\overrightarrow{\nabla g}(0,0) = (1,-2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} g'_v(0,0) = 1 \\ g'_w(0,0) = -2 \end{cases}$

$$\left.\begin{matrix} z'_x = 7y^2 \cdot f' \cdot u'_g \cdot \left(g'_v \cdot v' + g'_w \cdot w'_x\right) = 7y^2 \cdot f' \cdot \left(g'_v \cdot 2x + g'_w \cdot y\right) \\ z'_y = 14y \cdot f + 7y^2 \cdot f' \cdot \left(u'_g \cdot g'_w \cdot w'_y + u'_h \cdot h' \cdot t'\right) = 14y \cdot f + 7y^2 \cdot f' \cdot \left(g'_w \cdot x + h' \cdot 2y\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} z'_x(0,1) = 7 \cdot f'(2) \cdot g'_w(0,0) = 7 \cdot f'(2) \cdot (-2) = -14 \cdot f'(2) \\ z'_y(0,1) = 14 \cdot f(2) + 7 \cdot f'(2) \cdot h'(1) \cdot 2 = 28 + 14 \cdot f'(2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$z'_x(0,1) + z'_y(0,1) = -14 \cdot f'(2) + 28 + 14 \cdot f'(2) = 28$$

4.- Aurkitu, $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq r^2\right\}$ eskualdean, puntuak non $f(x,y)=x^2+y^2+xy$ funtzioak maximo eta minimo absolutuak hartzen dituen.

(2.5 puntu)

A multzo itxi eta mugatuan *f* funtzio jarraituak maximo eta minimo absolutuak izan behar dituela Weiertrass-en teoremak ziurtatzen digu.

Lehenengo *A* eskualdean dauden puntu kritiko libreak kalkulatuko ditugu:

$$\left.\begin{array}{l} f'_x=2x+y=0 \\ f'_y=2y+x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad P_1=(0,0)\in A$$ puntu kritiko bakarra lortzen dugu. Eta $\boxed{f(P_1)=0}$.

Orain, *A* eskualdearen mugako puntu kritikoak kalkulatuko ditugu (puntu kritiko baldintzatuak alegia). Hiru zati bereizten dira:

- mugako $y=0$ zatia, $\forall x\in[0,r]$:

  $$\left.\begin{array}{l} f(x,y)=x^2+y^2+xy \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x)=x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=2x=0 \quad \Rightarrow \quad P_1=(0,0)$$

  Eta zati honetan ere funtzio jarraitua, $f(x)=x^2$, multzo itxian, $\forall x\in[0,r]$, dugunez, mugako puntuak ere kontuan hartu behar ditugu, hau da:
  $P_2=(r,0)$. Eta $\boxed{f(P_2)=r^2}$

- mugako $x=0$ zatia, $\forall y\in[0,r]$:
  Aurreko kasuaren simetrikoa da, beraz, $P_3=(0,r)$ puntua dugu. Eta $\boxed{f(P_3)=r^2}$

- mugako $x^2+y^2=r^2$ zatia:
  Hemen Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliko dugu:

  $$W(x,y)=x^2+y^2+xy+\lambda(x^2+y^2-r^2)$$

  $$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} W'_x=2x+y+2\lambda x=0 \\ W'_y=2y+x+2\lambda y=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lambda=-\dfrac{2x+y}{2x} \\ \lambda=-\dfrac{2y+x}{2y} \end{array}\right\} 2xy+y^2=2xy+x^2 \Rightarrow x^2=y^2 \\ x^2+y^2=r^2 \end{array}\right\} 2x^2=r^2 \rightarrow x=\pm\frac{r}{\sqrt{2}}$$

  Baina soluzio negatiboa baztertuko dugu *A* eskualdean ez baitago. Beraz, hemendik aterako dugun puntu bakarra $P_4=\left(\dfrac{r}{\sqrt{2}},\dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)$ izango da. Eta $\boxed{f(P_4)=\dfrac{3r^2}{2}}$

Puntu guztiak konparatuz, hurrengoa dugu:

Minimo absolutua $P_1(0,0)$ eta Maximo absolutua $P_4=\left(\dfrac{r}{\sqrt{2}},\dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)$