Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Guztira

Azterketaren iraupena: 2 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Azter ezazu $I=\int_2^{\infty}\frac{x+\sin x}{x^3+4}dx$ integral inpropioaren izaera.

(2 puntu)

$I=\int_2^{\infty}f(x)dx$ non $f(x)=\frac{x+\sin x}{x^3+4}\geq 0 \quad \forall x\in[2,\infty)$

∞ puntu singular bakarra da.

Integral eredua $I=\int_2^{\infty}\frac{1}{x^m}dx$ $\nearrow$ konbergentea $\forall m>1$; $\searrow$ Dibergentea $\forall m\leq 1$

Konparaziozko irizpidea aplikatuz:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^m}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^m\cdot(x+\sin x)}{x^3+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+1}}{x^3+4}+\lim_{x\to\infty}\frac{x^m\cdot\sin x}{x^3+4}\underset{(m=2)}{=}1+0\cdot(\text{bornatua})=1+0=1$$

$1\in(0,\infty)$ $\Rightarrow$ Izaera bera daukate integralek.

$m=2>1$ $\Rightarrow$ Integral eredua konbergentea da.

Beraz, I konbergentea da.

2.- Izan bedi $D \subseteq \mathbb{R}^3$ eremu sinpleki konexuan definituriko $\vec{F} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}$ funtzio jarraitua deribatu partzial jarraituekin. Azaldu hurrengo baieztapenak zuzenak ote diren:

a) Baldin D eremuan $\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} = 0 \Rightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall C \subset D$ itxia, sinplea eta leuna edo zatika leuna.

b) Izan bedi C D eremuko zirkunferentzia bat. Baldin $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} = 0$ D eremuan.

c) Baldin $\vec{F} = \overrightarrow{\nabla u} \Rightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall C \subset D$ itxia, sinplea eta leuna edo zatika leuna.

d) Izan bedi D eremuko C kurba itxia, sinplea eta leuna edo zatika leuna, S gainazalaren muga. Baldin $\vec{F}$ bektorearen errotazionalaren fluxua S gainazalean zehar nulua bada, orduan $\vec{F}$ bektorearen zirkulazioa C kurbatik nulua da.

(Puntu1)

a) Zuzena da.
Stokes-en teoremaren aplikatuz:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} \cdot d\vec{S} \underset{\left(\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}=0\right)}{=} 0$$

(S gainazala C kurba itxiak mugaturikoa)

Edo Teorema 4 erabiliz:

D eremu sinpleki konexuan $\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} = 0 \Rightarrow \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ bidearekiko independentea da.

Eta orain Teorema 2 aplikatuz:

$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ bidearekiko independentea $\Leftrightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall C \subset D$ itxia, sinplea eta leuna edo zatika leuna.

b) Ez du zertan zuzena izango.
C zirkunferentzia bat besterik ez denez, ezin dugu $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ emaitzatik inolako ondoriorik atera (adibidez, ez dakigu kurba itxi guztien gaineko lerro integralak nuluak izango ote diren).

c) Zuzena da.

$$\vec{F} = \overrightarrow{\nabla u} \overset{\text{(DEF)}}{\Leftrightarrow} \exists \text{ funtzio potentziala} \overset{\text{(Teorema 1)}}{\Leftrightarrow} \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ bidearekiko independentea} \overset{\text{(Teorema 2)}}{\Leftrightarrow}$$

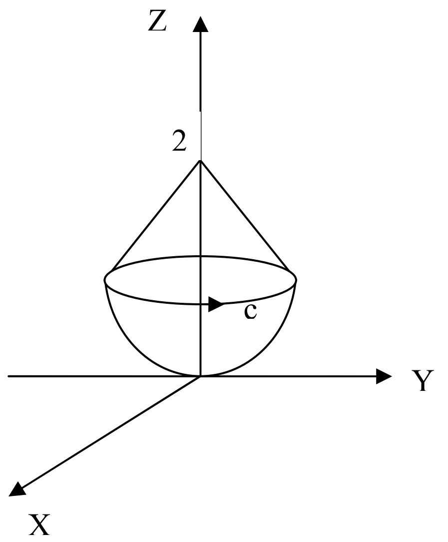
$$\Leftrightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall C \subset D \text{ itxia.}$$

d) Zuzena da.

Stokes-en teoremak dioena baita: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} \cdot d\vec{S}$

3.- Kalkulatu $\vec{F} = x^2 \cdot \vec{i} + xy(z-1) \cdot \vec{j} + x^2 \sin(xy) \cdot \vec{k}$ bektorearen zirkulazioa $z = x^2 + y^2$ eta $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ gainazalen arteko ebakidura-kurban zehar.

(2 puntu)



$$\left.\begin{array}{r} z = x^2 + y^2 \\ z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}\right\} \Rightarrow z = 2 - \sqrt{z} \Rightarrow z^2 - 5z + 4 = 0$$

$$\Rightarrow z = \begin{cases} 4 \text{ (ezinezkoa)} \\ 1 \end{cases} \Rightarrow C \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \left(x^2 dx + xy(z-1)dy + x^2 \sin(xy) dz \right) \underset{(z=1 \Rightarrow dz=0)}{=} \oint_C x^2 dx = 0$$

4.- Izan bedi $\vec{F} = (x+y-a)\cdot\vec{i} + (x+y)\cdot\vec{j} + g(z)\cdot\vec{k}$ eremu bektoriala, non a konstante bat den eta g funtzio deribagarria. Edozein gainazal itxitan zehar bektore horren fluxua nulua dela eta $\vec{F}(1,1,0) = 0\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j} + \vec{k}$ ezagutzen bada:

a) Aurkitu a eta g.

b) Kalkulatu $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, C kurba sinplea eta leuna izanik, $A(0,0,0)$ puntutik, $B(1,2,3)$ puntura.

(2 puntu)

a)

$$\forall S \text{ itxia } \Phi_S\left(\vec{F}\right) \underset{GAUS}{=} \iiint_V div\left(\vec{F}\right) dxdydz = 0 \Rightarrow div\left(\vec{F}\right) = 0 \Leftrightarrow 1+1+g'(z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g'(z) = -2 \Rightarrow g(z) = -2z + k$$

Gainera $\vec{F}(1,1,0) = 0\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j} + \vec{k} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-a=0 \Leftrightarrow a=2 \\ g(0)=1 \Leftrightarrow k=1 \Leftrightarrow g(z) = -2z+1 \end{cases}$

b) Ikus dezagun $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ bidearekiko independentea den.

$\vec{F} = (x+y-a)\cdot\vec{i} + (x+y)\cdot\vec{j} + g(z)\cdot\vec{k}$ jarraitua da eta deribatu partzial jarraituak ditu, $\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$ $\mathbb{R}^3$ eremu sinpleki konexuan , beraz $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ bidearekiko independentea da.

Funtzio potentziala kalkulatuko dugu:

$$U(x,y,z) = \int_0^x (t+y-2)dt + \int_0^y tdt + \int_0^z (-2t+1)dt = \frac{x^2}{2} + xy - 2x + \frac{y^2}{2} - z^2 + z + k$$

Eta $\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = U(B) - U(A) = -\frac{7}{2}$

5.- Izan bitez $S_1 \equiv z = x^2 + y^2$ eta $S_2 \equiv z = 16 - x^2 - y^2$ gainazalak.

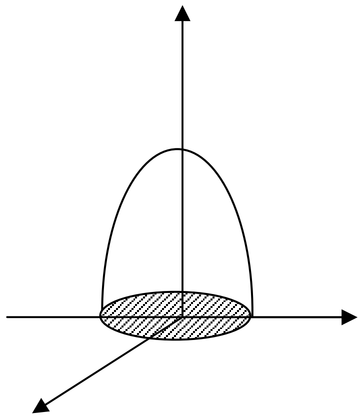
a) Kalkulatu S_2 gainazalaren zatiaren azalera non $z \geq 0$.

b) Kalkulatu S_1 eta S_2 gainazalek mugaturiko solidoaren bolumena.

c) $\vec{F} = 2xy \cdot \vec{i} + (3y - y^2) \cdot \vec{j} - 3z \cdot \vec{k}$ eremu bektoriala emanik, kalkulatu aurreko solidoa mugatzen duten gainazaletako zati bakoitzetik irtengo den fluxua.

(3 puntu)

a)



$$\text{Azalera}\left(S_2\right) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy$$

non $z = 16 - x^2 - y^2 \Rightarrow \begin{cases} z'_x = -2x \\ z'_y = -2y \end{cases}$

eta $R_{xy} \equiv x^2 + y^2 \leq 16$

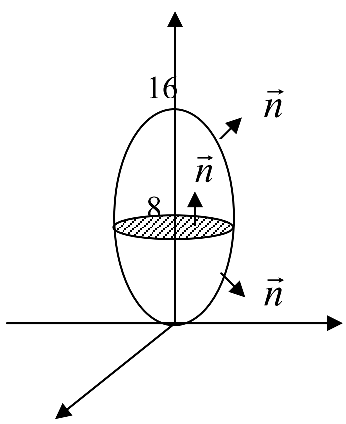
Beraz, $\text{Azalera}\left(S_2\right) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy$

Polarretan: $\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases} \Rightarrow J = \rho$

$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq \rho \leq 4$

Orduan, $\text{Azalera}\left(S_2\right) = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}\, d\rho d\theta = 2\pi \dfrac{\left(1 + 4\rho^2\right)^{3/2}}{3/2} \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{6} \cdot \left(65^{3/3} - 1\right)$

b)



$$\left.\begin{array}{r} z = x^2 + y^2 \\ z = 16 - x^2 - y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 16 - z \Leftrightarrow z = 8$$

Zilindrikoetan: $\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \Rightarrow J = \rho \\ z = z \end{cases}$

$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq \rho \leq \sqrt{8} \quad \rho^2 \leq z \leq 16 - \rho^2$

Beraz, $\text{Bolumena} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{8}} \int_{\rho^2}^{16-\rho^2} \rho dz d\rho d\theta =$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{8}} \rho(16 - 2\rho^2) d\rho = 2\pi \left(8\rho^2 - \frac{\rho^4}{2}\right)_0^{\sqrt{8}} = 2\pi\left(64 - \frac{64}{2}\right) = 64\pi$$

c) Izan bedi $S = S_1 \cup S_2$ gainazal itxia aurreko atalean kalkulatutako solidoaren muga.

$$\Phi_S\left(\vec{F}\right) = \Phi_{S_1}\left(\vec{F}\right) + \Phi_{S_2}\left(\vec{F}\right) \underset{GAUS}{=} \iiint_V div\left(\vec{F}\right) dxdydz \underset{div\left(\vec{F}\right)=0}{=} 0 \Rightarrow \Phi_{S_1} = -\Phi_{S_2}$$

Izan bedi orain $S_3 \equiv z = 8 \quad \Rightarrow \quad S' = S_1 \cup S_3$ gainazal itxia da eta $\Phi_{S_1} = -\Phi_{S_3}$ (aurreko kasuan azaldu dugun bezala).

$$\Phi_{S_3} = \iint_{S_3} (2xydydz + (3y - y^2)dzdx - 3zdxdy) \underset{(z=8 \Rightarrow dz=0)}{=} \pm \iint_{R_{xy}} -24dxdy \underset{\gamma < \frac{\pi}{2}}{=} -24 \iint_{R_{xy}} dxdy =$$

$$= -24 \cdot \text{Azalera}\left(R_{xy}\right) = -192\pi \ , \qquad R_{xy} \equiv x^2 + y^2 \leq 8 \text{ baita.}$$

Orduan, $\Phi_{S_1} = -\Phi_{S_3} = 192\pi$ eta $\Phi_{S_2} = -\Phi_{S_1} = -192\pi$