1.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{2^6}+\ldots+\dfrac{1}{2^{2n}}}{a^2+a^4+a^6+\ldots+a^{2n}} \quad \forall a\neq 0$

(1.5 puntu)

$$\forall a\neq 0 \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}}{a^2+a^4+a^6+\ldots+a^{2n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^2+a^4+a^6+\ldots+a^{2n}\right)}=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{2n}}$$

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{2n}}$ serie geometrikoa da, bere arrazoia $r=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}<1 \;\Rightarrow$ konbergentea da. Eta, beraz, batura finitua dauka, $S=\dfrac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}}=\dfrac{1}{3}$

- Era berean, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{2n}$ serie geometrikoa da, bere arrazoia $r=a^2<1 \;\Rightarrow$ konbergentea da $\;\Leftrightarrow\; |a|<1 \;\Leftrightarrow\; -1<a<1$. Eta $\forall a\geq 1$ edo $\forall a\leq -1$ dibergentea da ($a^{2n}>0 \quad \forall n \Rightarrow$ gai positiboz osaturiko seriea denez, konbergentea ez bada, dibergentea da)

Beraz, $\forall a\in(-1,1)$ batura finitua dauka, $S=\dfrac{a^2}{1-a^2} \quad (a\neq 0)$

Eta $\forall a\in\left(-\infty,-1\right]\cup\left[1,\infty\right)$ batura infinitua da, $S=\infty$

Orduan, $\forall a\neq 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}}{a^2+a^4+a^6+\ldots+a^{2n}}=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{a^2}{1-a^2}}=\dfrac{1-a^2}{3a^2} & \forall a\in(-1,1)\\[2ex] \dfrac{\frac{1}{3}}{\infty}=0 & \forall a\in\left(-\infty,-1\right]\cup\left[1,\infty\right)\end{cases}$$

<u>Oharra</u>: Ikusten denez, ariketa STOLZ-en irizpidea erabili gabe ebatz daiteke. Baina inork aplikatu nahi badu, bakarrik erabil zezakeen izendatzaileko segida dibergentea zenean, hau da $\forall a\in\left(-\infty,-1\right]\cup\left[1,\infty\right)$ kasuan. Beste kasuan, txarto erabilita legoke.

2.- Adierazi, erantzuna arrazoituz, ea hurrengo serieak konbergenteak diren:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n^{-3/2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\mathrm{L}\left(4n^4+5n\right)}{\mathrm{L}\left(2n^2+1\right)}$

(Puntu 1)

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n^{-3/2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ serie alternatua denez, gai orokorraren balio absolutuak definituriko seriea aztertzen hasiko gara:

$\left|\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}\right| = \frac{1}{n^{3/2}}$ eta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ konbergentea da (Riemann-en seriea, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ $a>1$ izanik).

Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n^{-3/2}$ absolutuki konbergentea da.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\mathrm{L}\left(4n^4+5n\right)}{\mathrm{L}\left(2n^2+1\right)}$ serie alternatua denez, gai orokorraren balio absolutuak definituriko seriea aztertzen hasiko gara:

$\left|(-1)^n \cdot \frac{\mathrm{L}\left(4n^4+5n\right)}{\mathrm{L}\left(2n^2+1\right)}\right| = \frac{\mathrm{L}\left(4n^4+5n\right)}{\mathrm{L}\left(2n^2+1\right)}$ eta honi, konbergentzi Baldintza Beharrezkoa aplikatuko diogu:

$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\left(4n^4+5n\right)}{\mathrm{L}\left(2n^2+1\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}\left(n^4\right)}{\mathrm{L}\left(n^2\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{4\mathrm{L}(n)}{2\mathrm{L}(n)} = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\mathrm{L}\left(4n^4+5n\right)}{\mathrm{L}\left(2n^2+1\right)}$ ezin da konbergentea izan.

3.- Aurkitu $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot\cos\left(\dfrac{1}{2n}\right)}{(n+1)^2}\cdot x^n$ **berretura-seriearen konbergentzi arloa.**

(Puntu 1)

Gai orokorraren balio absolutuak definituriko berretura-serieari D´Alambert-en irizpidea aplikatuko diogu:

$$|a_n|=\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot\cos\left(\frac{1}{2n}\right)}{(n+1)^2}\cdot x^n\right|=\frac{\cos\left(\frac{1}{2n}\right)}{(n+1)^2}\cdot|x|^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\cos\left(\frac{1}{2n+2}\right)}{(n+2)^2}\cdot|x|^{n+1}}{\dfrac{\cos\left(\frac{1}{2n}\right)}{(n+1)^2}\cdot|x|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\cdot\cos\left(\frac{1}{2n+2}\right)}{(n+2)^2\cdot\cos\left(\frac{1}{2n}\right)}\cdot|x|=|x|<1\quad\Leftrightarrow\quad x\in(-1,1)$$

- $x=-1$ puntuan, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{2n+1}\cdot\cos\left(\frac{1}{2n}\right)}{(n+1)^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(\frac{1}{2n}\right)}{(n+1)^2}$ seriea lortzen dugu. Bere izaera aztertuz:

$a_n=\dfrac{\cos\left(\frac{1}{2n}\right)}{(n+1)^2}\sim\dfrac{1}{n^2}$ eta $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ konbergentea da, beraz $-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(\frac{1}{2n}\right)}{(n+1)^2}$ konbergentea da.

- $x=1$ puntuan, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot\cos\left(\frac{1}{2n}\right)}{(n+1)^2}$ seriea lortzen dugu (kasu honetan alternatua). Balio absolututan aztertuz:

$|a_n|=\dfrac{\cos\left(\frac{1}{2n}\right)}{(n+1)^2}\sim\dfrac{1}{n^2}$ eta, aurreko kasuan bezala, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konbergentea da, beraz $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot\cos\left(\frac{1}{2n}\right)}{(n+1)^2}$ absolutuki konbergentea da.

Orduan, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot\cos\left(\frac{1}{2n}\right)}{(n+1)^2}\cdot x^n$ berretura-seriearen konbergentzi arloa $[-1,1]$ da.

4.- MacLaurin-en 4. mailako polinomioa erabiliz, hurbildu $\cos\left(\frac{1}{4}\right)$ -aren balioa, eta mugatu hurbilketa horretan egindako errorea.

(Puntu 1)

Hurbilketa horretarako, $f(x) = \cos x$ funtzioaren MacLaurin-en 4. mailako polinomioa erabiliko dugu:

$$f(x) = P_4(x) + r_4(x)$$

non $P_4(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{f^{iv)}(0)}{4!} \cdot x^4 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

eta $r_4(x) = \frac{f^{v)}(\theta x)}{5!} x^5$ (Lagrangeren hondarra)

Dakigunez, $f(x) \simeq P_4(x) \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) \simeq P_4\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4^2 \cdot 2!} + \frac{1}{4^4 \cdot 4!}$

Eta, hurbilketa horretan egindako errorea, Lagrangeren hondarraren balio absolutua da:

$$\text{Errorea} = |r_4(x)| = \left|\frac{f^{v)}(\theta x)}{5!} x^5\right| \leq \frac{|x|^5}{5!} \quad \Rightarrow \quad \text{Errorea} = \left|r_4\left(\frac{1}{4}\right)\right| \leq \frac{1}{4^5 \cdot 5!}$$

5.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{2-|x-y|}}{\mathrm{L}\left(4-x^2-y^2\right)}$$

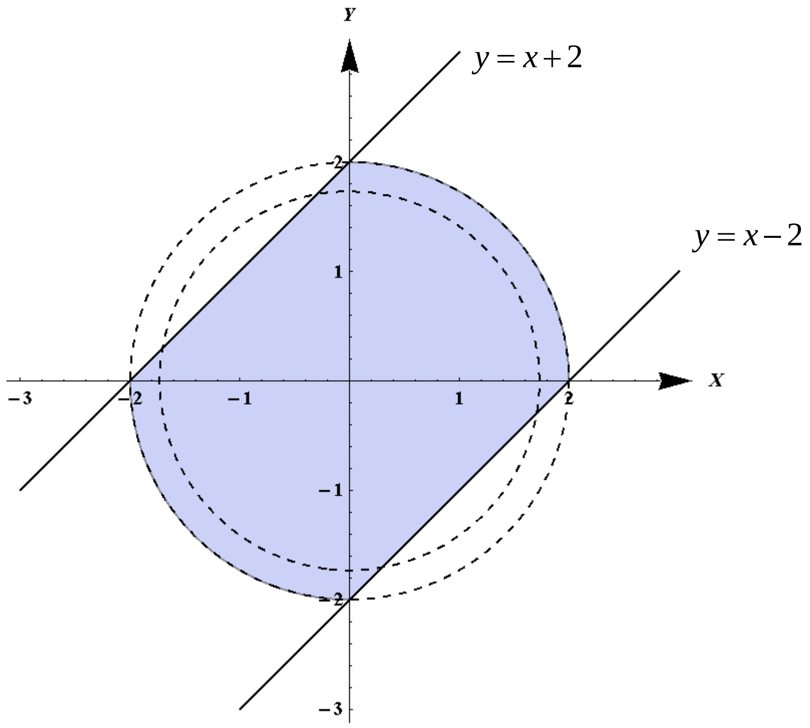
(1.5 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,2-|x-y|\geq 0,\ 4-x^2-y^2>0,\mathrm{L}\left(4-x^2-y^2\right)\neq 0\right\}$$

$2-|x-y|\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x-y|\leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2\leq x-y\leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x-2\leq y\leq x+2$

$4-x^2-y^2>0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2<4$

$\mathrm{L}\left(4-x^2-y^2\right)\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4-x^2-y^2\neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2\neq 3$



6.- $f(x,y) = x\cdot e^{|y|}$ **funtzioa emanik,**

a) Kalkulatu bere deribatu partzialak (0,0) eta (1,0) puntuetan

b) Aztertu bere diferentziagarritasuna (0,0) eta (1,0) puntuetan

(2 puntu)

$$f(x,y) = x\cdot e^{|y|} = \begin{cases} x\cdot e^{y} & \forall y \ge 0 \\ x\cdot e^{-y} & \forall y < 0 \end{cases}$$

a) x-rekiko deribatu partzialak:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h} = 1$$

$$f'_x(1,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1+h-1}{h} = 1$$

y-rekiko deribatu partzialak:

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0$$

$$f'_y(1,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(1,k)-f(1,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{e^{|k|}-1}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\mathrm{L}\left(e^{|k|}\right)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{|k|}{k}\begin{cases} = \lim\limits_{k\to 0^+}\dfrac{k}{k} = 1 \\ = \lim\limits_{k\to 0^-}\dfrac{-k}{k} = -1 \end{cases} \Rightarrow \nexists\, f'_y(1,0)$$

b) $\nexists\, f'_y(1,0) \Rightarrow$ (1,0) puntuan f ezin da diferentziagarria izan

(0,0) puntuan, berriz, BBN aplikatuko dugu (erraz ikusten da f jarraitua dela (0,0) puntuan. Izan ere, f jarraitua da $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, funtzio jarraituren konposaketa baita).

$$f \text{ diferentziagarria (0,0) puntuan} \Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h\cdot e^{|k|}-h}{\sqrt{h^2+k^2}} \overset{(1)}{=}$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho\cos\theta\cdot\left(e^{\rho\cdot|\sin\theta|}-1\right)}{\rho} = \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\cos\theta\cdot\left(e^{\rho\cdot|\sin\theta|}-1\right) = 0$$

Beraz, f diferentziagarria da (0,0) puntuan.

(1) polarretan adierazita: $\begin{cases} h = \rho\cos\theta \\ k = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \forall\theta\in[0,2\pi)$

Oharra: Funtzio honen x-rekiko deribatu partzialak deribazio-erregelak erabiliz kalkula daitezke (puntu guztietan). y-rekiko deribatu partzialak kalkulatzeko, berriz, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y\ne 0$ deribazio-erregelak erabil daitezke, baina definizioa erabili behar da $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y = 0$ ((0,0) eta (1,0) puntuetan, besteak beste)..

7.- Izan bitez *x* eta *y* triangelu angeluzuzenaren katetoen luzerak. Diferentziala erabiliz, kalkulatu hipotenusaren luzeraren hurbileko balioa, katetoen luzerak $x = 4.1\,cm$ eta $y = 2.9\,cm$ direnean.

(Puntu 1)

$f = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ funtzioak hipotenusaren luzera ematen du.

Funtzio hau diferentziagarria da $\forall (x,y) \neq (0,0)$. Beraz:

$$\Delta f = f\left(x_0 + h, y_0 + k\right) - f\left(x_0, y_0\right) \simeq df\left(x_0, y_0\right) = f_x'\left(x_0, y_0\right) \cdot dx + f_y'\left(x_0, y_0\right) \cdot dy$$

non $\left(x_0, y_0\right) \neq (0,0)$, $h = dx \to 0$ eta $k = dy \to 0$

Hurbilketa hori $\left(x_0, y_0\right) = (4,3)$ puntuan aplikatuta, honako hau dugu:

$$\Delta f = f(4.1, 2.9) - f(4,3) \simeq df(4,3) = f_x'(4,3) \cdot dx + f_y'(4,3) \cdot dy$$

non $dx = 0.1$ eta $dy = -0.1$.

Eta $f_x' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ eta $f_y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Beraz, $f(4.1, 3.9) \simeq f(4,3) + f_x'(4,3) \cdot dx + f_y'(4,3) \cdot dy = 5 + \dfrac{4}{5} \cdot (0.1) - \dfrac{3}{5} \cdot (0.1) = 5.02\,cm$

8.- Erantzun, arrazoituz (beharrezkoa bada, kontraadibide bat jarriz), hurrengo galderak:

a) Ba al da egia $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \quad \Rightarrow \quad a_n \sim b_n$ **?**

b) Baldin $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konbergentea bada, orduan** $\{a_n\}$ **konbergentea da?**

c) Jakinda (0,0) puntuan zuzen guztietan zehar kalkulatutako *f* funtzioaren limite direkzionalek 0 balio dutela, ondoriozta dezakegu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ **?**

d) Baldin *f* funtzio diferentziagarria bada (0,0) puntuan, eta, puntu horretan, zuzen guztietan zehar kalkulatutako limite direkzionalek 1 balio badute, ondoriozta dezakegu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$**?**

(Puntu 1)

a) Ez da egia. Kontraadibidea:

$$\left.\begin{array}{l} a_n = n^2 \\ b_n = n^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad \text{baina} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \neq 1 \quad \Rightarrow \quad a_n \not\sim b_n$$

<u>Oharra</u>: $a_n \sim b_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

b) Egia da.

Baldin $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea bada, orduan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \{a_n\}$ konbergentea da.

<u>Oharra</u>: $\{a_n\}$ konbergentea da $\quad \Leftrightarrow \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$

c) Ezin da ondorioztatu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ izango denik. Zuzen guztietan zehar kalkulatutako limite direkzionalak, infinitu limite izan arren, ez dira limite direkzional guztiak. Bide gehiago daude, zuzenak ez diren gainerako kurbek definitzen dituztenak alegia, eta, horietako batetik limite direkzionalaren balioa 0 ez izatea gerta daiteke. Eta, kasu horretan, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

d) Kasu honetan $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$ aterako dela ondoriozta dezakegu.

(0,0) puntuan *f* funtzio diferentziagarria denez, orduan jarraitua da puntu horretan, eta:

$$f \text{ jarraitua da } (0,0) \text{ puntuan} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \in \mathbb{R}$$

Hau da, ziurtatuta daukagu (0,0) puntuan limitea existitzen dela. Eta zuzen guztietan zehar kalkulatutako limite direkzionalek 1 balio badute, orduan, nahitaez, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$

<u>Oharra</u>: $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell \quad \Leftrightarrow$ Limite direkzional guztiak existitzen dira eta ℓ balio berdina dute.