1.- Kalkula ezazu $\lim\limits_{n\to\infty} a^n \cdot \sin\left(\dfrac{1}{a^{n-1}}\right) \quad \forall a>0$

(1.25 puntu)

$$\forall a>0 \quad \lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} a^{n-1} = \begin{cases} 0 & \forall a<1 \\ 1 & a=1 \\ \infty & \forall a>1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{n-1}} = \begin{cases} \infty & \forall a<1 \\ 1 & a=1 \\ 0 & \forall a>1 \end{cases}$$

Orduan, $\forall a>0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} a^n \cdot \sin\left(\dfrac{1}{a^{n-1}}\right) = \begin{cases} 0\cdot mugatua=0 & \forall a<1 \\ \sin 1 & a=1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} a^n \cdot \dfrac{1}{a^{n-1}} = a & \forall a>1 \end{cases}$

2.- Azter ezazu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n + \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ **seriearen izaera, non** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konbergentea den,** $a_n \geq 0 \;\; \forall n$**, eta,** $\alpha \in \mathbb{R}$**.**

(0.75 puntu)

$a_n \geq 0 \;\; \forall n$ eta $\dfrac{1}{n^\alpha} > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ eta $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n + \dfrac{1}{n^\alpha}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ idatz daiteke, eta, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n + \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ konbergentea da $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ konbergenteak dira.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea denez, aztertu behar dugun seriearen izaera $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ seriearen izaeraren mende dago.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ Riemann-en seriea da, beraz konbergentea da $\forall \alpha > 1$ eta dibergente da $\forall \alpha \leq 1$.

Orduan, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n + \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ konbergentea da $\forall \alpha > 1$ eta dibergente da $\forall \alpha \leq 1$.

3.- Azter ezazu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^6 + (n!)^2}{(2n)! + n^{20} + (\mathrm{L}n)^{50}}$ **seriearen izaera.**

(0.75 puntu)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seriearen izaera aztertu behar dugu, non $a_n = \frac{2^n + n^6 + (n!)^2}{(2n)! + n^{20} + (\mathrm{L}n)^{50}} > 0 \quad \forall n$

Konparaziozko irizpidea erabiliz:

$a_n = \frac{2^n + n^6 + (n!)^2}{(2n)! + n^{20} + (\mathrm{L}n)^{50}} \sim \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, beraz, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ serieen izaera berdina da. Bigarrenaren izara aztertuko dugu D´Alambert irizpidea erabiliz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2 \cdot (2n)!}{(2n+2)! \cdot (n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

konbergentea da $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^6 + (n!)^2}{(2n)! + n^{20} + (\mathrm{L}n)^{50}}$ konbergentea da.

4.- $f(x) = x \cdot \mathrm{L}\left(1 + x^2\right)$ **funtzioa emanik,**

a) Aurki ezazu *f* -ren berretura-seriezko garapena, non balio duen adieraziz.

b) Lor ezazu $f^{27)}(0)$ **-ren balioa.**

c) Kalkula ezazu $f(0.1)$ **-aren bali hurbildua, errorea** $\varepsilon < 10^{-5}$ **izanik.**

(2.25 puntu)

a) $f(x) = x \cdot \mathrm{L}\left(1+x^2\right) = x \cdot g(x)$, non $g(x) = \mathrm{L}\left(1+x^2\right) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} 2x \cdot (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot (-1)^n \cdot x^{2n+1} \quad \forall x \in (-1,1)$$

(1) Serie geometrikoaren batura da, non $r = -x^2 \quad \Rightarrow \quad$ konbergentea da $\quad \Leftrightarrow \quad |r| = x^2 < 1$

Eta, integratuz aurreko emaitza:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+2}}{n+1} \quad \forall x \in (-1,1)$$

Orduan $f(x) = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+2}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+3}}{n+1} \quad \forall x \in (-1,1)$

$x = -1$ puntuan:

$$\begin{cases} \exists f \text{ eta jarraitua da} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+3}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \text{ konbergentea da (LEIBNIZ)} \Rightarrow \exists \text{ batura jarraitua} \end{cases}$$

$x=1$ puntuan:

$$\begin{cases} \exists f \text{ eta jarraitua da} \\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n+3}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1} \text{ konbergentea da (LEIBNIZ)} \Rightarrow \exists \text{ batura jarraitua} \end{cases}$$

Beraz, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n+3}}{n+1} \quad \forall x\in[-1,1]$

b) Lortu dugun berretura-seriezko garapena *f*-ren Taylor-en seriea da $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{n)}(0)}{n!}\cdot x^n\right)$, orduan, x^{27} gaiaren koefizientean $f^{27)}(0)$ agertzen da:

$$x^{27}=x^{2n+3} \quad \Leftrightarrow \quad n=12 \quad \Rightarrow \quad (-1)^{12}\cdot\frac{x^{27}}{13}=\frac{f^{27)}(0)}{27!}\cdot x^{27} \quad \Leftrightarrow \quad f^{27)}(0)=\frac{27!}{13}$$

c) Lortutako berretura-seriezko garapenean ordezkatuz:

$f(0.1)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{(0.1)^{2n+3}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{10^{2n+3}\cdot(n+1)}$, Leibniz-en teorema egiaztatzen duen serie alternatua dena, orduan:

$$\exists S=f(0.1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10^{2n+3}\cdot(n+1)} \quad \text{eta} \quad |S-S_n|<|a_{n+1}|, \quad \text{non } a_n=\frac{(-1)^n}{10^{2n+3}\cdot(n+1)}.$$

Orduan, $|S-S_n|<\dfrac{1}{10^{2n+5}\cdot(n+2)}\le 10^{-5}=\dfrac{1}{10^5} \quad \Leftrightarrow \quad 10^{2n+5}\cdot(n+2)\ge 10^5$

Eta emaitza hau $n=0$ baliorako egiaztatzen da. Hau da, $f(0.1)\simeq\dfrac{1}{10^3}$

5.- Aurki ezazu analitiko eta grafikoki funtzio honen definizio-eremua:

$$f(x,y)=\arccos\left(\frac{x}{3}\right)+\sqrt{\frac{5-|x|-|y|}{x^2+y^2-25}}+\mathrm{L}\left(\sin(\pi x)\right)$$

(1.75 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, -1\le\frac{x}{3}\le 1, x^2+y^2-25\neq 0, \frac{5-|x|-|y|}{x^2+y^2-25}\ge 0, \sin(\pi x)>0\right\}$$

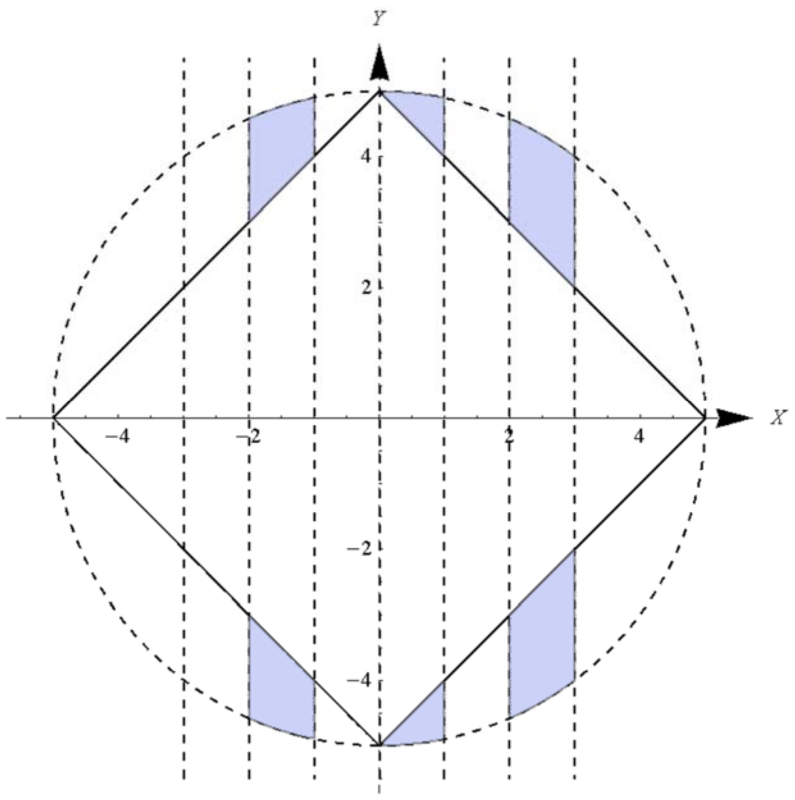
$$-1\le\frac{x}{3}\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad -3\le x\le 3$$

$$x^2+y^2-25\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2\neq 25$$

$$\frac{5-|x|-|y|}{x^2+y^2-25}\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 5-|x|-|y|\ge 0 \text{ eta } x^2+y^2-25>0 \\ \text{edo} \\ 5-|x|-|y|\le 0 \text{ eta } x^2+y^2-25<0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} |x|+|y|\le 5 \text{ eta } x^2+y^2>25 \text{ (inoiz ez)} \\ \text{edo} \\ |x|+|y|\ge 5 \text{ eta } x^2+y^2<25 \end{cases}$$

$$\sin(\pi x)>0 \quad\Leftrightarrow\quad \pi x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(2k\pi,(2k+1)\pi\right) \quad\Leftrightarrow\quad x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(2k,2k+1\right)$$



6.- $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{L}\left(x^n\cdot y+1\right)}{x^2+y^2} & \forall(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik,**

a) Estudia ezazu *f* -ren jarraitutasuna (0,0) puntuan, $\forall n\in\mathbb{N}$

b) Kalkula itzazu f'_x **eta** f'_y **(0,0) puntuan,** $\forall n\in\mathbb{N}$

c) Estudia ezazu *f* -ren diferentziagarritasuna (0,0) puntuan, $\forall n\in\mathbb{N}$

(2 puntu)

a) *f* jarraitua da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\mathrm{L}\left(x^n\cdot y+1\right)}{x^2+y^2}\overset{(1)}{=}\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{\mathrm{L}\left(\rho^{n+1}\cdot\cos^n\theta\cdot\sin\theta+1\right)}{\rho^2}=$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho^{n+1}\cdot\cos^n\theta\cdot\sin\theta}{\rho^2}=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\rho^{n-1}\cdot\cos^n\theta\cdot\sin\theta\begin{cases}=0 & \forall n\geq2\\ \nexists & n=1\end{cases}$$

Orduan, *f* jarraitua da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow n\geq2$

(1) Polarretan adierazita: $\begin{cases}x=\rho\cdot\cos\theta\\ y=\rho\cdot\sin\theta\end{cases}\quad\forall\theta\in\left[0,2\pi\right)$

b) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\mathrm{L}1-0}{h^2}=0\quad\forall n\in\mathbb{N}$

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{\mathrm{L}1-0}{k^2}=0\quad\forall n\in\mathbb{N}$

c) $n=1$ kasuan *f* ez da jarraitua (0,0) puntuan, beraz ezin da diferentziagarria izan puntu horretan.

$\forall n\geq2$, diferentziagarria izateko BBN aplikatuko dugu:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\dfrac{\mathrm{L}\left(h^n\cdot k+1\right)}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}\overset{(2)}{=}$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{\mathrm{L}\left(\rho^{n+1}\cdot\cos^n\theta\cdot\sin\theta+1\right)}{\rho^3}=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho^{n+1}\cdot\cos^n\theta\cdot\sin\theta}{\rho^3}=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\rho^{n-2}\cdot\cos^n\theta\cdot\sin\theta\begin{cases}=0 & \forall n\geq3\\ \nexists & n=2\end{cases}$$

Orduan, *f* diferentziagarria da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow n\geq3$.

(2) Polarretan adierazita: $\begin{cases}h=\rho\cdot\cos\theta\\ k=\rho\cdot\sin\theta\end{cases}\quad\forall\theta\in\left[0,2\pi\right)$

7.- $f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2 & \forall(x,y)\ /\ x\geq 0 \\ \sqrt{x^2+y^2} & \forall(x,y)\ /\ x<0 \end{cases}$ **funtzioa emanik, kalkula itzazu** f'_x **eta** f'_y **(0,0) puntuan.**

(1.25 puntu)

$f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$. Funtzioaren definizioa kontuan hartuz:

$$f(h,0)=\begin{cases} h^2 & \forall h\geq 0 \\ \sqrt{h^2} & \forall h<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h^2-0}{h}=0 \\ \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\sqrt{h^2}-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h}{h}=-1 \end{cases} \Rightarrow \nexists\, f'_x(0,0)$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{k^2-0}{k}=0$$

<u>Oharra</u>: f'_y (0,0) puntuan deribazio-erregelak erabiliz ere kalkula daiteke. Izan ere:

$$f(x,y)=x^2+y^2 \quad \forall(x,y)\ /\ x\geq 0 \ \Rightarrow\ f'_y(x,y)=2y \quad \forall(x,y)\ /\ x\geq 0 \ \Rightarrow\ f'_y(0,0)=0$$