Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	Ariketa 8	Ariketa 9	Guztira

Azterketaren iraupena: 3 ordu

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e+e^{1/2}+e^{1/3}+\ldots+e^{1/n}-n}{\mathrm{L}n}$

(Puntu 1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e+e^{1/2}+e^{1/3}+\ldots+e^{1/n}-n}{\mathrm{L}n} \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(e+e^{1/2}+e^{1/3}+\ldots+e^{1/n}-n\right)-\left(e+e^{1/2}+e^{1/3}+\ldots+e^{1/n-1}-(n-1)\right)}{\mathrm{L}n-\mathrm{L}(n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}-1}{\mathrm{L}\left(\dfrac{n}{n-1}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{L}\left(e^{1/n}\right)}{\dfrac{n}{n-1}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{n-n+1}{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n-1}} == \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} 1$$

(*) $\{\mathrm{L}n\}$ hertsiki gorakorra eta dibergentea da, beraz STOLZ irizpidea erabil daiteke.

2.- Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a+2}{2}\right)^{2n}\cdot\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ seriearen izaera, $a\in\mathbb{R}$ parametroaren balioen arabera.

(2 puntu)

$a_n=\left(\frac{a+2}{2}\right)^{2n}\cdot\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\geq 0 \quad \forall a\in\mathbb{R}$ eta $\forall n\in\mathbb{N}$ eta D´Alambert-en irizpidea erabiliz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a+2}{2}\right)^{2n+2}\cdot\sin\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{\left(\frac{a+2}{2}\right)^{2n}\cdot\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}=\left(\frac{a+2}{2}\right)^2\begin{cases}<1\Leftrightarrow -1<\frac{a+2}{2}<1\Leftrightarrow -4<a<0\\ >1\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a+2}{2}>1\Leftrightarrow a>0\\ \frac{a+2}{2}<-1\Leftrightarrow a<-4\end{cases}\\ =1\Leftrightarrow \quad \frac{a+2}{2}=\pm1\Leftrightarrow a=0,\, a=-4\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} a=0 \text{ eta } a=-4 \quad\Rightarrow\quad a_n=\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{n^2}\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\text{ konbergentea da}\end{array}\right\}\Rightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{ konbergentea da}$$

Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konbergentea da $\forall a\in\left[-4,0\right]$ eta dibergentea da $\forall a\in(-\infty,-4)\cup(0,\infty)$.

3.- Aurkitu $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$**,** $g(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ **eta** $h(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}$ **funtzioen berretura-seriezko garapenak, non balio duten adieraziz.**

(Puntu 1)

- f serie geometrikoaren batura da, bere arrazoia $r=x$ delarik. Beraz,

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad \forall x\in(-1,1)$$

- Orain, aurreko garapena deribatuz:

$$g(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1} \quad \forall x\in(-1,1)$$

Kasu honetan tarteko muturrak aztertu behar dira:

$x=1$ puntuan $\nexists g$

$x=-1$ puntuan $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot n$ ez da konbergentea

Beraz, $g(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1} \quad \forall x\in(-1,1)$

- Bukatzeko, $h(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}=x\cdot g(x)=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^n \quad \forall x\in(-1,1)$

Kasu honetan, aurrekoan bezala, tarteko muturretan garapenak ez du balio.

4.- $f(x,y)=|y|\cdot\sin\left(x^2+y^2\right)$ **funtzioa emanik:**

a) Estudiatu bere jarraitutasuna (0,0) puntuan.

b) Aurkitu bere deribatu partzialak (0,0) puntuan.

c) Estudiatu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.

(Puntu 1)

a) *f* jarraitua da (0,0) puntuan funtzio jarraituen konposizioa baita.

b) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0-0}{h}=0$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{|k|\cdot\sin\left(k^2\right)-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{|k|\cdot k^2}{k}=\lim_{k\to 0}|k|\cdot k=\begin{cases}\lim\limits_{k\to 0^+}k^2=0\\ \lim\limits_{k\to 0^-}\left(-k^2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f'_y(0,0)=0$

c) Diferentziagarria izateko B.B. biak betetzen dira. Orain B.B.N. aplikatuko dugu:

$$f \text{ diferentziagarria } (0,0) \text{ puntuan } \Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|k|\cdot\sin\left(h^2+k^2\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}\overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=}\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho\cdot|\cos\theta\cdot\sin\theta|\cdot\sin\left(\rho^2\right)}{\rho}=\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}|\cos\theta\cdot\sin\theta|\cdot\sin\left(\rho^2\right)=0$$

Beraz, *f* diferentziagarria da (0,0) puntuan.

(*) Polarretan $\begin{cases}h=\rho\cos\theta\\ k=\rho\sin\theta\end{cases}$

5.- $\begin{cases} x+2y+2u+e^u+v=1 \\ xy+u+v+\sin v=0 \end{cases}$ **ekuazio-sistemak** $P=(0,0,0,0)$ **puntuaren ingurunean** $u=u(x,y)$ **eta** $v=v(x,y)$ **funtzio inplizitu diferentziagarriak definitzen dituela jakinda,** $f(x,y)=u(x,y)+v(x,y)$ **funtzioa eraikitzen da. Kalkulatu *f* funtzioaren deribatu direkzionala** $y=3x+x^2$ **kurbari dagokion (0,0) puntuko zuzen ukitzailearen norabidean.**

(1.75 puntu)

$u=u(x,y)$ eta $v=v(x,y)$ funtzio inplizitu diferentziagarriak direnez, *f* ere funtzio diferentziagarria da, beraz, $\left.\dfrac{df}{d\vec{v}}\right|_{(0,0)}=\overrightarrow{\nabla f}(0,0)\cdot\vec{v} \quad \forall\vec{v}$ unitario.

Kasu honetan, $\vec{v}$ bektorea $y=3x+x^2$ kurbari dagokion (0,0) puntuko bektore ukitzaile unitarioa da:

$y'=3+2x \;\Rightarrow\; y'(0)=3 \;\Rightarrow\; (1,3)$ zuzen ukitzailearen norabide-bektorea da, eta, unitario bihurtuz, $\vec{v}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}},\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

Orain *f*-ren gradientea kalkulatuko dugu, $\overrightarrow{\nabla f}(0,0)=\left(f'_x(0,0),f'_y(0,0)\right)$, non

$f'_x=u'_x+v'_x$ eta $f'_y=u'_y+v'_y$.

Beraz, emandako sisteman *x*-rekiko eta *y*-rekiko deribatu behar dugu *u* eta *v* funtzioen deribatu partzialak lortzeko.

x-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} 1+\left(2+e^u\right)\cdot u'_x+v'_x=0 \\ y+u'_x+\left(1+\cos v\right)\cdot v'_x=0 \end{cases} \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \begin{cases} 1+3u'_x(0,0)+v'_x(0,0)=0 \\ u'_x(0,0)+2v'_x(0,0)=0 \Leftrightarrow u'_x(0,0)=-2v'_x(0,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_x(0,0)=\dfrac{1}{5} \\ u'_x(0,0)=\dfrac{-2}{5} \end{cases}$$

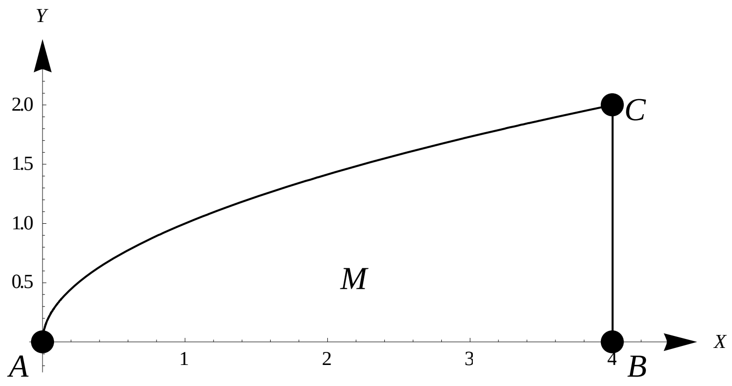
x-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} 2+\left(2+e^u\right)\cdot u'_y+v'_y=0 \\ x+u'_y+\left(1+\cos v\right)\cdot v'_y=0 \end{cases} \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \begin{cases} 2+3u'_y(0,0)+v'_y(0,0)=0 \\ u'_y(0,0)+2v'_y(0,0)=0 \Leftrightarrow u'_y(0,0)=-2v'_y(0,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_y(0,0)=\dfrac{2}{5} \\ u'_y(0,0)=\dfrac{-4}{5} \end{cases}$$

Beraz, $\overrightarrow{\nabla f}(0,0)=\left(-\dfrac{1}{5},-\dfrac{2}{5}\right) \;\Rightarrow\; \left.\dfrac{df}{d\vec{v}}\right|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{10}}-\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{10}}=-\dfrac{7}{5\sqrt{10}}=-\dfrac{7\sqrt{10}}{50}$

6.- Kalkulatu $f(x,y)=x^2-4xy+5$ **funtzioaren mutur absolutuak** $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\le x\le 4,\ 0\le y\le\sqrt{x}\right\}$ **multzoan.**

(1.75 puntu)



f funtzio jarraitua da eta *M* multzo itxia eta mugatua beraz, Weierstrass-en teorema egiaztatzen da, eta, multzo horretan *f* funtzioak maximo eta minimo absolutuak dituela ziurtatuta daukagu.

Hasiko gara *f*-ren puntu kritikoak kalkulatzen:

$$\begin{cases} f'_x = 2x-4y=0 \\ f'_y=-4x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \end{cases} \Rightarrow \quad A=(0,0) \text{ puntu kritikoa da. Eta } A\in M$$

Orain *f*-ren puntu kritiko baldintzatuak kalkulatuko ditugu, *M*-ren mugan daudenak hain zuzen ere. Lau kasu bereizi behar ditugu:

(1) $y=0 \quad \forall x\in(0,4) \quad \Rightarrow \quad f(x,0)=x^2+5=F(x) \quad \Rightarrow \quad F'(x)=2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad A$

(2) $x=4 \quad \forall y\in(0,2) \quad \Rightarrow \quad f(4,y)=16-16y+5=G(y) \quad \Rightarrow \quad G'(y)=-16\neq 0 \quad \forall y$

(3) $y=\sqrt{x} \quad \forall x\in(0,4) \quad \Rightarrow \quad f\left(x,\sqrt{x}\right)=x^2-4x^{3/2}+5=H(x) \quad \Rightarrow \quad H'(x)=2x-6x^{1/2}$

$$\Leftrightarrow \quad H'(x)=2x^{1/2}\left(x^{1/2}-3\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=0 \quad \Rightarrow \quad A \\ x=9\notin M \end{cases}$$

(4) Mugako erpinak (bi baldintza batera betetzen dituzten puntuak):

Berriro *A* puntua, eta, bi puntu berri gehiago, $B=(4,0)$ eta $C=(4,2)$.

Behin lortu *M* multzoan *f* funtzioak dituen puntu kritiko guztiak, puntu horietan funtzioaren balioak kalkulatzen ditugu:

$$f(A)=5 \quad f(B)=19 \quad f(C)=-11 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} B \text{ maximo} \\ C \text{ minimo} \end{cases} \text{absolutuak dira}$$

7.- $\vec{F}(x,y,z) = xy\cdot\vec{i} + yz\cdot\vec{j} + xz\cdot\vec{k}$ **eremu bektoriala eta** $\begin{cases} S_1 \equiv x^2+y^2=1 \\ S_2 \equiv x^2+y^2=4 \\ S_3 \equiv z=1 \\ S_4 \equiv z=4 \end{cases}$

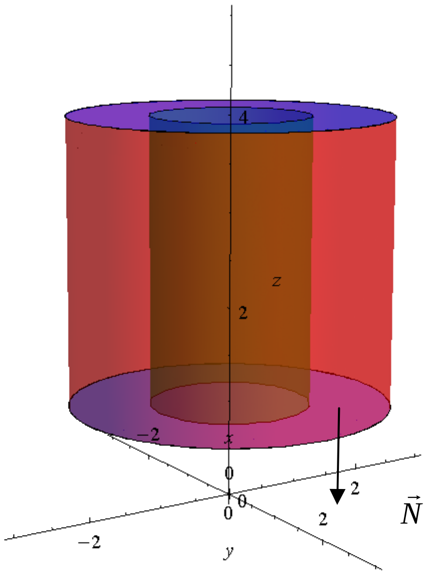
gainazalek osaturiko *S* gainazal itxia emanik:

a) **Kalkulatu *S* gainazaletik irteten den $\vec{F}$ bektorearen fluxua.**

b) **Kalkulatu *S* gainazaleko $z=1$ gainazalaren zatitik irteten den $\vec{F}$ bektorearen fluxua**

(1.5 puntu)

a)



$\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira $\mathbb{R}^3$ osoan, eta *S* gainazal itxia da (*V* solidoaren muga). Beraz, Gauss-en teorema erabil daiteke:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V div\left(\vec{F}\right)dxdydz$$

non $div\left(\vec{F}\right) = y+z+x$. Orduan:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V (y+z+x)dxdydz$$

V solidoa $x=0$ eta $y=0$ planoekiko simetrikoa da, eta , aldi berean, *x* eta *y* funtzio bakoitiak dira, beraz,

$$\iiint_V (y+x)dxdydz = 0$$

Orduan,

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V z\,dxdydz \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_1^4 \rho z\,dz\,d\rho\,d\theta = 2\pi\int_1^2 \rho\cdot\left.\frac{z^2}{2}\right|_1^4 d\rho = 15\pi\int_1^2 \rho\,d\rho = 15\pi\cdot\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_1^2 = \frac{45\pi}{2}$$

(*) Zilindrikoetan $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases}$ $|J|=\rho \quad\Rightarrow\quad V\equiv\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 1\le\rho\le 2 \\ 1\le z\le 4 \end{cases}$

b) *S* gainazaleko $S_3 \equiv z=1$ gainazalaren zatitik irteten den bektorearen fluxua integral honek ematen du:

$$\iint_{S_3} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \pm\iint_{R_{xy}}\left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right)dxdy$$

non $S_3 \equiv z=1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}_{xy} \equiv 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \quad \Rightarrow \quad \vec{N}=(0,0,1)$ eta $\gamma > \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow$

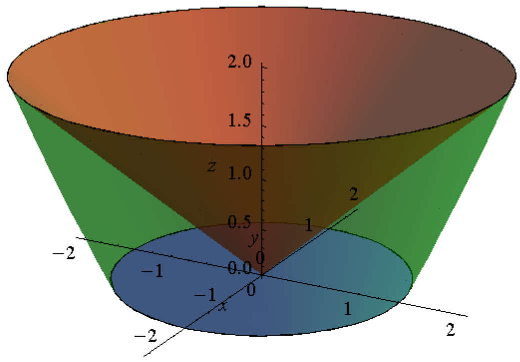
$$\Rightarrow \quad \iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\iint_{R_{xy}} x dx dy \overset{(**)}{=} 0$$

(**) R_{xy} eskualdea $x=0$ zuzenarekiko simetrikoa da, eta x funtzio bakoitia.

8.- Kalkulatu $V \equiv \begin{cases} z \geq 0 \\ z \leq \sqrt{x^2+y^2} \\ z \geq x^2+y^2-2 \end{cases}$ **solidoaren bolumena.**

(Puntu 1)

$$\left.\begin{array}{r} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=x^2+y^2-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad z=z^2-2 \quad \Leftrightarrow \quad z^2-z-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z=2 \\ z=-1 \;\# \;(z \geq 0) \end{cases}$$



$$\text{Bolumena}\left(V\right)=\iiint\limits_V dxdydz$$

Beraz, $V \equiv \begin{cases} 0 \leq z \leq 2 \\ z \leq \sqrt{x^2+y^2} \\ z \geq x^2+y^2-2 \end{cases}$

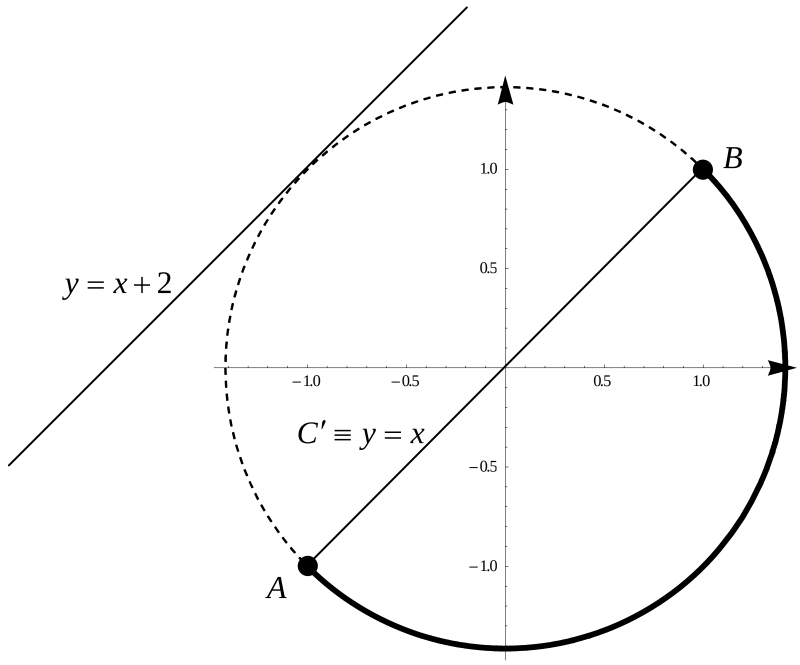
Eta, zilindrikoetan, $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} \quad |J|=\rho \quad \Rightarrow \quad V \equiv \begin{cases} 0 \leq z \leq 2 \\ z \leq \rho \\ z \geq \rho^2-2 \end{cases} \equiv \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 2 \\ z \leq \rho \leq \sqrt{z+2} \end{cases}$

Orduan, $\text{Bolumena}\left(V\right)=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2\int\limits_z^{\sqrt{z+2}} \rho\, d\rho\, dz\, d\theta = 2\pi\int\limits_0^2 \frac{z+2-z^2}{2}dz=\pi\left(\frac{z^2}{2}+2z-\frac{z^3}{3}\right)_0^2=$

$$=\pi\left(2+4-\frac{8}{3}\right)=\frac{10\pi}{3}$$

9.- $\vec{F}(x,y)=\dfrac{1}{y-x-2}\cdot\vec{i}+\dfrac{1}{x-y+2}\cdot\vec{j}$ **eremu bektoriala emanik, kalkulatu bere lerro-integrala** $C\equiv x^2+y^2=2$ **kurban zehar, noranzko positiboan ibilitakoa,** $A(-1,-1)$ **puntutik** $B(1,1)$ **puntura.**

(Puntu 1)



Kalkulatu behar den integrala honako hau da:

$$\int_{C(A\to B)}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{C(A\to B)}\left(\frac{1}{y-x-2}\cdot dx+\frac{1}{x-y+2}\cdot dy\right)$$

Integral horren ebazpena konplikatuegia denez, beste modu batera planteatzen saiatuko gara.

$$\vec{F}(x,y)=X(x,y)\cdot\vec{i}+Y(x,y)\cdot\vec{j}\quad\text{non}\quad\begin{cases}X(x,y)=\dfrac{1}{y-x-2}\\[2mm] Y(x,y)=\dfrac{1}{x-y+2}\end{cases}$$

$\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira $\forall(x,y)\mathbb{R}^2\,/\,y\neq x+2$. Adibidez, $D=\left\{(x,y)\mathbb{R}^2\,/\,y<x+2\right\}$ eremu sinpleki konexuan. Eta, gainera, $X'_y=\dfrac{-1}{(y-x-2)^2}=\dfrac{-1}{(x-y+2)^2}=Y'_x$. Orduan, eremu horretan, $\int\vec{F}\cdot d\vec{r}$ bidearekiko independentea dela frogatu dugu.

Izan bedi, orduan, $C'\equiv y=x$ bide berria $\Rightarrow$ $dy=dx$ eta:

$$\int_{C(A\to B)}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{C'(A\to B)}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{2}\cdot dx+\frac{1}{2}\cdot dx\right)=0$$