Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	Ariketa 8	Ariketa 9	Guztira

Azterketaren iraupena: 3 ordu

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- $a_n = \dfrac{3^n}{n^2 + \mathrm{L}n + a^n}$ **gai orokorra emanik, non** $a > 0$**,**

a) Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

b) Aztertu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **seriearen izaera.**

(1.5 puntu)

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(n^2 + \mathrm{L}n + a^n\right) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2 + \mathrm{L}n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty & \forall a < 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2 + \mathrm{L}n + 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty & a = 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty & \forall a > 1 \end{cases}$$. Orduan:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n^2 + \mathrm{L}n + a^n} = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{n^2} = \infty & \forall a \le 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{a}\right)^n = \begin{cases} \infty & \forall a < 3 \\ 1 & a = 3 \\ 0 & \forall a > 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n^2 + \mathrm{L}n + a^n} = \begin{cases} \infty & \forall a < 3 \\ 1 & a = 3 \\ 0 & \forall a > 3 \end{cases}$$

b) Aurreko emaitzaren arabera, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serieak ez du konbergentzi baldintza beharrezkoa betetzen $\forall a \le 3$. Eta, $a_n > 0 \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da $\forall a \le 3$.

$\forall a>3$, berriz, BB betetzen dela frogatu dugu, eta, baita $a_n \sim \left(\frac{3}{a}\right)^n$ ere. Eta, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{a}\right)^n$ serie geometrikoa da, non $r=\frac{3}{a}<1$ beraz, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{a}\right)^n$ konbergentea da, eta, baita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ere.

2.- Aurkitu $f(x)=\mathrm{L}(a+bx)$, non $a>0$ eta $b>0$, funtzioaren berretura-seriezko garapena, non balio duen adieraziz.

(1.5 puntu)

$$f(x)=\mathrm{L}(a+bx) \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{b}{a+bx}=\frac{\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}x}\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}x\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\cdot x^n$$

(*) Serie geometrikoaren batura non $r=-\frac{b}{a}x \Rightarrow$ konbergentea da $\Leftrightarrow\ |r|=\frac{b}{a}|x|<1 \ \Leftrightarrow\ |x|<\frac{a}{b} \ \Leftrightarrow\ x\in\left(-\frac{a}{b},\frac{a}{b}\right)$

Eta, tarte horretan integratuz ($f(0)=\mathrm{L}(a)$ kontuan hartuta):

$$f(x)=\mathrm{L}(a+bx)=\mathrm{L}(a)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \forall x\in\left(-\frac{a}{b},\frac{a}{b}\right)$$

Orain, tarteko muturretan aztertuz:

$x=-\frac{a}{b}$ puntuan: $\nexists f\left(-\frac{a}{b}\right)$

$$x=\frac{a}{b} \text{ puntuan: } \begin{cases} \exists f\left(\frac{a}{b}\right)=\mathrm{L}(2a) \text{ eta funtzio jarraitua da} \\ \mathrm{L}(a)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} \text{ konbergentea da (LEIBNIZ)} \ \Rightarrow\ \exists\, S \text{ funtzio jarraitua} \end{cases}$$

Beraz, $f(x)=\mathrm{L}(a+bx)=\mathrm{L}(a)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \forall x\in\left(-\frac{a}{b},\frac{a}{b}\right]$

3.- $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin\left(x^2-y^2\right)}{x-y} & \forall(x,y)\,/\,x\neq y \\ 2x & \forall(x,y)\,/\,x=y \end{cases}$ **funtzioa emanik, kalkulatu** $f'_x(1,1)$ **eta** $f'_y(2,3)$**.**

(Puntu 1.25)

$$\forall(x,y)\,/\,x\neq y \quad f'_y=\frac{-2y\cdot\cos\left(x^2-y^2\right)\cdot(x-y)+\sin\left(x^2-y^2\right)}{(x-y)^2} \Rightarrow f'_y(2,3)=6\cdot\cos\left(-5\right)+\sin\left(-5\right)$$

$\forall(x,y)\,/\,x=y$ ezin dira deribazio-erregelak erabili. Beraz, (1,1) punturako, definizioa erabiliz:

$$f'_x(1,1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\sin\left((1+h)^2-1\right)}{1+h-1}-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\sin\left(2h+h^2\right)}{h}-2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(2h+h^2\right)-2h}{h^2}\overset{(L'H)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{(2+2h)\cdot\cos\left(2h+h^2\right)-2}{2h}\overset{(L'H)}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cdot\cos\left(2h+h^2\right)-(2+2h)^2\cdot\sin\left(2h+h^2\right)}{2}=1$$

4.- Lehenengo eta bigarren mailako deribatu jarraituak dituen $F(x)=\int_{-x}^{x} g(x+y)dy$ **funtzioa emanik, zeintzuk dira *g* eta** g' **funtzioek bete behar dituzten baldintzak, *F* funtzioak maximo erlatiboa izan dezan** $x=0$ **puntuan?**

(Puntu 1)

F funtzioak $x=0$ puntuan maximo erlatiboa izateko BB $F'(0)=0$ da:

$$F'(x)=\int_{-x}^{x} g'(x+y)dy+g(2x)+g(0) \quad \Rightarrow \quad F'(0)=2g(0)=0 \quad \Leftrightarrow \quad g(0)=0$$

Behin frogatu *F* funtzioak $x=0$ puntuan puntu kritikoa duela, froga dezagun maximoa dela. Horretarako BN $F''(0)<0$ da:

$$F''(x)=\int_{-x}^{x} g''(x+y)dy+g'(2x)+g'(0)+2g'(2x) \quad \Rightarrow \quad F''(0)=4g'(0)<0 \quad \Leftrightarrow \quad g'(0)<0$$

5.- $f(x,y)=\dfrac{1-xy}{z}$ **funtzioa emanik,** $P(x,y,z)=(1,1,1)$ **puntuan diferentziagarria,** $\vec{u}$ **bektore unitarioa existitzen da non** $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_P=\sqrt{3}$ **?**

(Puntu 1)

f diferentziagarria denez *P* puntuan, bere deribatu direkzional maximoa gradientearen modulua da. Beraz, kalkula dezagun:

$$f(x,y)=\frac{1-xy}{z} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'_x=\dfrac{-y}{z} \quad \Rightarrow \quad f'_x(P)=-1 \\ f'_y=\dfrac{-x}{z} \quad \Rightarrow \quad f'_y(P)=-1 \\ f'_z=-\dfrac{1-xy}{z^2} \quad \Rightarrow \quad f'_x(P)=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\nabla f}(P)=(-1,-1,0) \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{\nabla f}(P)\right|=\sqrt{2}$$

Eta $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_P=\sqrt{3}>\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \nexists\vec{u}$ unitarioa non $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_P=\sqrt{3}$

6.- a) $\begin{cases} F(x,y,z) = x + y - 2z + 3 = 0 \\ G(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 5 = 0 \end{cases}$ **sistema emanik, frogatu** $P(x,y,z) = (1,0,2)$ **puntuaren ingurunean** $y = y(x)$ **eta** $z = z(x)$ **funtzioak definitzen dituela.**

b) Aurkitu sistema horrek definituriko kurbari dagokion *P* puntuko zuzen ukitzailearen ekuazioa.

(1.75 puntu)

a) Funtzio inplizituaren teorema aplikatuz:

i. $\begin{cases} F(P) = 1 - 4 + 3 = 0 \\ G(P) = 1 + 4 - 5 = 0 \end{cases}$

ii. F eta G funtzioen deribatu partzialak existitzen eta jarraituak dira $P(x,y,z) = (1,0,2)$ puntuaren ingurunean:

$$\begin{cases} F'_x = 1 & F'_y = 1 & F'_z = -2 \\ G'_x = 2x & G'_y = 4y & G'_z = 2z \end{cases}.$$

iii. $\left|\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}\right|_P = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

Beraz, $P(x,y,z) = (1,0,2)$ puntuaren ingurunean $\exists! \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$ diferentziagarria, $\begin{cases} y(1) = 0 \\ z(1) = 2 \end{cases}$ izanik.

b) $C \equiv \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$ kurbari dagokion P puntuko zuzen ukitzailearen ekuazioa $x - 1 = \dfrac{y}{y'(1)} = \dfrac{z-2}{z'(1)}$ da.

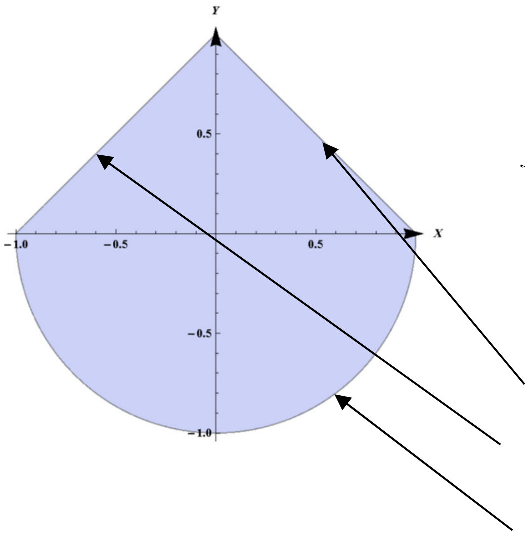
$\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) = 0 \\ G(x, y(x), z(x)) = 0 \end{cases}$ sisteman x-rekiko deribatuko dugu:

$$\begin{cases} 1 + y' - 2z' = 0 \\ 2x + 4y \cdot y' + 2z \cdot z' = 0 \end{cases} \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \begin{cases} 1 + y'(1) - 2z'(1) = 0 \\ 2 + 4z'(1) = 0 \Leftrightarrow z'(1) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y'(1) = -2$$

Beraz, $x - 1 = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-2}{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{4} = z - 2$

7.- Kalkulatu $f(x,y)=x^2+y^2-x-y$ **funtzioaren mutur absolutuak** $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2\le 1,\ y\le 1+x,\ y\le 1-x\right\}$ **multzoan.**

(2.75 puntu)



M multzo itxi eta mugatua da, eta, f funtzio jarraitua, beraz Weiertrass-en teoremak ziurtatzen digu multzo horretan f-ren maximo eta minimo absolutuak existitzen direla.

Balio horiek lortzeko, f-ren puntu kritikoak baino ez ditugu aurkitu behar.

f-ren puntu kritiko ez-baldintzatuak kalkulatzen hasiko gara:

$$\left\{\begin{array}{l} f'_x=2x-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\dfrac{1}{2} \\ \\ f'_y=2y-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad A=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\in M$$

Orain, M-ren mugan dauden f-ren puntu kritikoak kalkulatuko ditugu, puntu kritiko baldintzatuak, hain zuzen ere.

Bi kasu bereizi behar ditugu.

- ✓ Baldintza bakar bat betetzen duten puntu kritikoak:

(1) $x^2+y^2=1$ mugako zatian daudenak (Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliz):

$$w(x,y)=x^2+y^2-x-y+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} w'_x=2x-1+2\lambda x=0 \\ w'_y=2y-1+2\lambda y=0 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \lambda=\dfrac{1-2x}{2x}=\dfrac{1-2y}{2y} \quad\Leftrightarrow\quad y=x \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad 2x^2=1 \quad\Leftrightarrow\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\overset{y\le 0}{\Rightarrow}\quad y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\overset{y=x}{\Rightarrow}\quad B=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(2) $y=1+x$ mugako zatian daudenak (Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliz):

$$w(x,y)=x^2+y^2-x-y+\lambda\left(1+x-y\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} w'_x = 2x-1+\lambda = 0 \\ w'_y = 2y-1-\lambda = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = 1-2x = 2y-1 \Leftrightarrow y = 1-x \\ y = 1+x \end{array}\right. \Rightarrow 1-x = 1+x \Leftrightarrow x = 0$$

$$x = 0 \overset{y\le 0}{\Rightarrow} y = 1 \Rightarrow C = (0,1)$$

(3) $y = 1-x$ mugako zatian daudenak (Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliz):

$$w(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + \lambda\left(1-x-y\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} w'_x = 2x-1-\lambda = 0 \\ w'_y = 2y-1-\lambda = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = 2x-1 = 2y-1 \Leftrightarrow y = x \\ y = 1-x \end{array}\right. \Rightarrow x = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow A \text{ (lehen lortutakoa)}$$

- ✓ Bi baldintza betetzen dituzten puntu kritikoak. Mugako erpinak, hain zuzen ere:

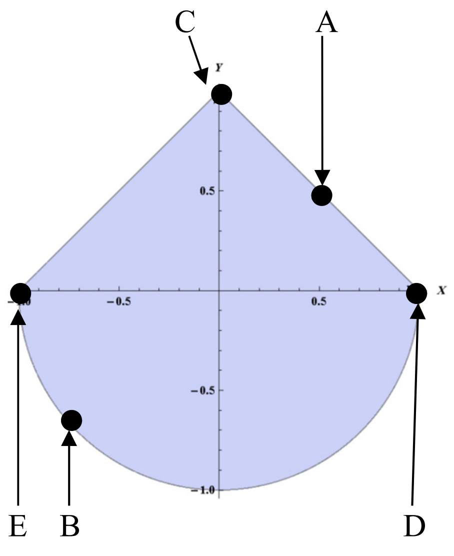
$C = (0,1)$ (lehen lortutakoa), eta, $D = (1,0)$ eta $E = (-1,0)$.

Behin lortu puntu kritiko guztiak, horietako bakoitzean *f*-ren balioa kalkulatuko dugu:

$$f\left(A\right) = -\frac{1}{2} \quad f\left(B\right) = 1+\sqrt{2} \quad f\left(C\right) = 0 \quad f\left(D\right) = 0 \quad f\left(E\right) = 2$$

Beraz, minimo absolutua *A* puntuan eta maximo absolutua *B* puntuan daude.

Oharra: (2) eta (3) kasuak Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabili gabe ere egin daitezke.



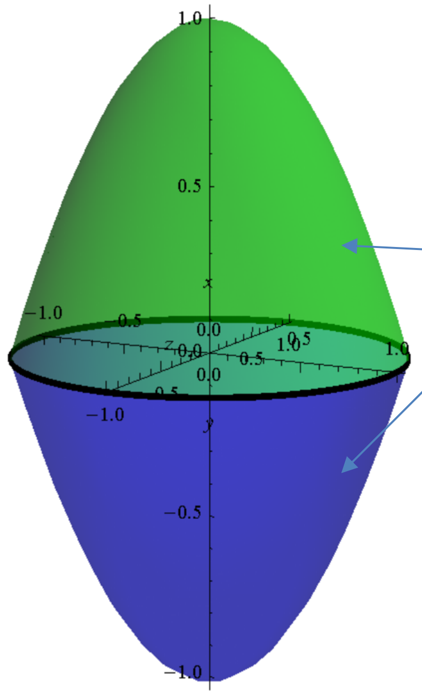
8.- Izan bedi S gainazal itxia $V \equiv \begin{cases} z \geq x^2 + y^2 - 1 \\ z \leq 1 - x^2 - y^2 \end{cases}$ solidoaren muga. Defini dezagun $\vec{F}(x,y,z) = \left(100e^{y+z} - 2xz\right)\cdot\vec{i} + \left(\cos(\pi - x) + 10y\right)\cdot\vec{j} + \left(z^2 - \arctan(x+y)\right)\cdot\vec{k}$ bektorea.

a) Kalkulatu S-ren azalera.

b) Kalkulatu S gainazaletik irteten den $\vec{F}$ bektorearen fluxua.

(2.25 puntu)

a)



V solidoa simetrikoa da $z = 0$ planoarekiko, eta S gainazala bi zatiz osaturik dago:

$S_1 \equiv z = x^2 + y^2 - 1$ eta

$S_2 \equiv z = 1 - x^2 - y^2$,

$\forall (x,y) \in R_{xy} \equiv x^2 + y^2 \leq 1$.

Eta biak azalera berdinekoak. Orduan:

$Azalera(S) = 2Azalera\left(S_1\right)$

non $Azalera\left(S_1\right) = \iint\limits_{R_{xy}} \left|\vec{N}\right| dxdy$

non $\vec{N} = (-2x, -2y, 1)$

Orduan:

$$Azalera(S) = 2\iint\limits_{R_{xy}} \sqrt{1 + 4\left(x^2 + y^2\right)}\, dxdy \overset{(*)}{=}$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}\, d\rho\, d\theta = 4\pi \left.\frac{\left(1 + 4\rho^2\right)^{3/2}}{3/2}\frac{1}{8}\right|_0^1 = \frac{\pi}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$

(*) Polarretan: $\begin{cases} x = \rho\cdot\cos\theta \\ y = \rho\cdot\sin\theta \end{cases}$ $\quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad R_{xy} = R_{xy} \equiv \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$

b) S gainazaletik irteten den $\vec{F}$ bektorearen fluxua kalkulatzeko $\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$ gainazal integrala kalkulatu behar dugu. Hala ere, S gainazal itxia denez, eta, $\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak funtzio jarraituak direnez, Gauss-en teorema erabil daiteke:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V div\left(\vec{F}\right)dxdydz = 10\iiint_V dxdydz \overset{(**)}{=} 10\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\rho^2-1}^{1-\rho^2} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta =$$

$$= 20\pi\int_0^1 \rho\left(1-\rho^2-\rho^2+1\right)d\rho = 20\pi\int_0^1 \rho\left(2-2\rho^2\right)d\rho = 20\pi\left(\rho^2-\frac{\rho^4}{2}\right)_0^1 = 10\pi$$

(**) Zilindrikoetan: $\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\theta \\ y=\rho\cdot\sin\theta \\ z=z \end{cases} \quad |J|=\rho \quad \Rightarrow \quad V\equiv\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\rho\le 1 \\ \rho^2-1\le z\le 1-\rho^2 \end{cases}$

9.- Indarra adierazten duen $\vec{F}(x,y,z)=\frac{y}{z}\cdot\vec{i}+\frac{x}{z}\cdot\vec{j}-\frac{xy}{z^2}\cdot\vec{k}$ bektorea emanik,

a) Kalkulatu indar horrek egindako lana $C\equiv\begin{cases} x^2+y^2=z+2 \\ z=y \end{cases}$ kurban zehar, $A(x,y,z)=\left(\sqrt{2},1,1\right)$ puntutik $B(x,y,z)=\left(0,2,2\right)$ puntura.

b) Justifikatu ea *A* eta *B* puntuen artean indar horrek egindako lana aukeratutako bidearekiko independentea den.

c) Aurkitu $\vec{F}$ -ren funtzio potentziala.

d) Lortu indar horrek egindako lana *A* puntutik *B* puntura, puntu biak elkartzen dituen zuzenean zehar.

(2 puntu)

a) $\vec{F}$ indarrak egindako lana lortzeko, bere lerro-integrala kalkulatu behar dugu:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C\left(\frac{y}{z}\cdot dx+\frac{x}{z}\cdot dy-\frac{xy}{z^2}\cdot dz\right) \underset{z=y}{=} \int_C\left(dx+\frac{x}{z}\cdot dz-\frac{xz}{z^2}\cdot dz\right) = \int_C dx = \int_{\sqrt{2}}^{0} dx = -\sqrt{2}$$

b) Izan bedi $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, z>0\right\}$ eremu sinpleki konexua.

Eremu horretan, $\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira, eta $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)=\vec{0}$

Beraz, $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ bidearekiko independentea da. Orduan, *A* eta *B* puntuen artean indar horrek egindako lana ez dago aukeratutako bidearen mende, *D* eremuan.

c) *D* eremuan $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ bidearekiko independentea dela frogatu dugunez, eremu horretan funtzio potentziala existitzen da:

$$U(x,y,z)=\int_0^x \frac{y}{z}\cdot dt+\int_2^y 0\,dt+\int_2^z 0\,dt+k=\frac{xy}{z}+k$$

d) *A* eta *B* puntuen artean indar horrek egindako lana aukeratutako bidearen mende ez dagoela frogatu dugunez, puntu biak elkartzen dituen zuzenean zehar lanaren balioa a) atalean lortutakoa da, $-\sqrt{2}$, hain zuzen ere.