Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Guztira 1. zatia

Azterketak 8 ariketa ditu 2 zatitan banatuta. Guztira 20 puntu dira eta azterketa gainditzeko 10 puntu atera behar dira.

Azterketaren iraupena: 3 ordu.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

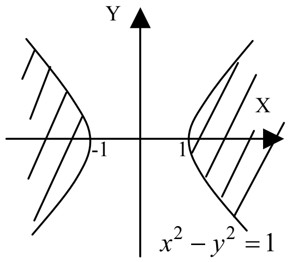
1.Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2-y^2-1}}{\mathrm{L}\left(2-|x|-|y|\right)}+\arccos\left(\frac{y}{|x|}\right)$$

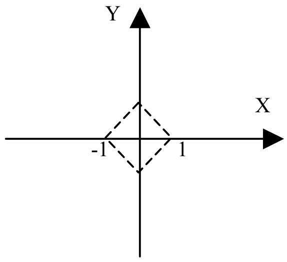
2 puntu

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2-y^2-1\geq 0,\ \mathrm{L}\left(2-|x|-|y|\right)\neq 0,\ 2-|x|-|y|>0,\ |x|\neq 0,\ -1\leq\frac{y}{|x|}\leq 1\right\}$$

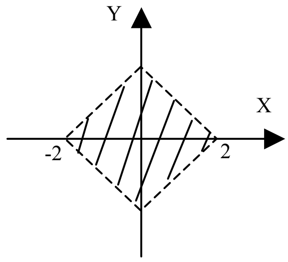
$x^2-y^2-1\geq 0 \Leftrightarrow x^2-y^2\geq 1$



$\mathrm{L}\left(2-|x|-|y|\right)\neq 0 \Leftrightarrow 2-|x|-|y|\neq 1 \Leftrightarrow |x|+|y|\neq 1$

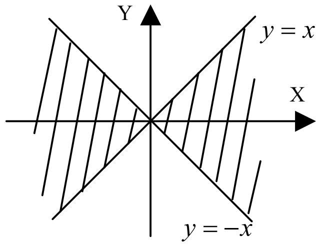


$2-|x|-|y|>0 \Leftrightarrow |x|+|y|<2$

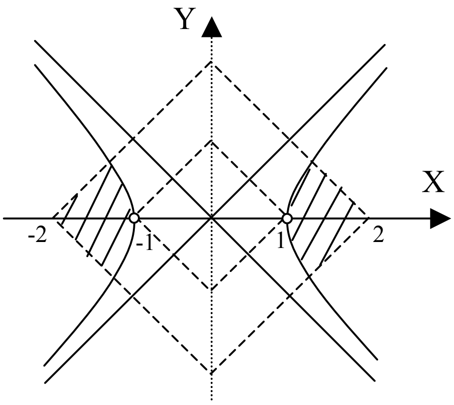


$|x|\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$

$$-1 \le \frac{y}{|x|} \le 1 \Leftrightarrow -|x| \le y \le |x|$$



Eta zati guztien ebakidura:



2.- $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin x\cdot \sin y}{\arcsin(x^2+y^2)} & \text{Baldin } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{Baldin } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ funtzioa emanik:

a) estudiatu bere jarraitasuna (0,0) puntuan
b) kalkulatu bere lehenengo deribatu partzialak (0,0) puntuan
c) estudiatu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan
d) estudiatu lehenengo deribatu partzialen jarraitasuna (0,0) puntuan

2 puntu

a) *f* jarraitua da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$

$f(0,0)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin x\cdot \sin y}{\arcsin(x^2+y^2)}=\frac{0}{0}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\sin(\rho\cdot\cos\theta)\cdot\sin(\rho\cdot\sin\theta)}{\arcsin(\rho^2)}\sim$$

$$\sim\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho\cdot\cos\theta\cdot\rho\cdot\sin\theta}{\rho^2}=\lim_{\rho\to0^+}\cos\theta\cdot\sin\theta=\varphi(\theta)\Rightarrow\nexists\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Beraz, *f* ez da jarraitua (0,0) puntuan.

b) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\dfrac{0}{\arcsin(h^2)}-0}{h}=0$

Simetriaz, $f'_y(0,0)=0$

c) *f* jarraitua ez denez (0,0) puntuan, ezin da diferentziagarria izan puntu horretan.

d) *f* ez da diferentziagarria (0,0) puntuan, hortaz puntu horretako lehenengo deribatu partzialak ezin dira jarraituak izan (hrietako bat jarraitua balitz (0,0) puntuan, orduan *f* diferentziagarria litzateke).

3.- Biraketa-konoaren enborraren bolumena honako adierazpen honek ematen digu:

$$V = f(x,y,z) = \frac{1}{3}\pi z(x^2 + xy + y^2)$$

non x goiko estalkiaren erradioa, y oinarriaren erradioa eta z altuera diren.

Baldin goiko estalkiaren erradioa 2 unitate segundoko abiaduraz txikitzen bada, oinarriaren erradioa 3 unitate segundoko abiaduraz hazten bada eta altuera 4 unitate segundoko abiaduraz txikitzen bada, kalkulatu zenbateko abiaduraz aldatzen den aurreko bolumena, $x = 10,\ y = 12,\ z = 18$ unean.

2 puntu

$V = V(t) = f(x,y,z) = f(x(t), y(t), z(t))$ eta kalkulatu behar duguna $V'(t)$ da.

$V'(t) = f'_x \cdot x'(t) + f'_y \cdot y'(t) + f'_z \cdot z'(t)$ non:

$x'(t) = -2 \qquad y'(t) = 3 \qquad z'(t) = -4$

$f'_x = \frac{1}{3}\pi z(2x + y) \quad \Rightarrow \quad f'_x(10,12,18) = 192\pi$

$f'_y = \frac{1}{3}\pi z(x + 2y) \quad \Rightarrow \quad f'_y(10,12,18) = 204\pi$

$f'_z = \frac{1}{3}\pi(x^2 + xy + y^2) \quad \Rightarrow \quad f'_z(10,12,18) = \frac{364}{3}\pi$

Orduan, $x = 10,\ y = 12,\ z = 18$ unean:

$$V'(t) = -2 \cdot 192\pi + 3 \cdot 204\pi - 4 \cdot \frac{364}{3}\pi = \frac{\pi}{3}(-1152 + 1836 - 1456) = -\frac{772}{3}\pi$$

4.- Aurkitu distantzia minimoa $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ puntutik $x^2+y^2+z^2=1$ esferaraino. (Ebatzi ariketa analitikoki, muturrei buruzko teoria erabiliz)

2.5 puntu

$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ puntutik $x^2+y^2+z^2=1$ esferaraino distantzia funtzio honek ematen digu:

$$d(x,y,z)=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}$$

Bere minimoa kalkulatu behar dugu, $x^2+y^2+z^2=1$ baldintzarekin.

Dakigunez, $f(x,y,z)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2$ funtzioaren muturrak eta aurreko funtzioarenak berdinak dira, beraz, honenak kalkulatuko ditugu.

Gainera, $x^2+y^2+z^2=1$ multzo itxi eta bornatua da, eta f funtzio jarraitua, beraz, Weiertrass-en teorema aplikatuz, badakigu maximo eta minimo absolutuak existitzen direla. Hau da, lortu behar dugun minimoa, mutur absolutua da.

Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliz:

$$w(x,y,z)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

Funtzio honi muturrak edukitzeko baldintza beharrezkoa aplikatzen zaio:

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} w'_x=2\left(x-\frac{1}{2}\right)+2\lambda x \\ w'_y=2\left(y-\frac{1}{2}\right)+2\lambda y \\ w'_z=2\left(z-\frac{1}{2}\right)+2\lambda z \end{array}\right. \Rightarrow \lambda=-\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x}=-\dfrac{y-\frac{1}{2}}{y}=-\dfrac{z-\frac{1}{2}}{z}\Leftrightarrow x=y=z \\ \hfill x^2+y^2+z^2-1=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2=1\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Beraz, bi puntu kritiko atera zaizkigu: $A=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ eta $B=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, bata maximo absolutua eta bestea minimo absolutua. Kalkulatuko ditugu, beraz, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ puntutik puntu hauetarainoko distantziak:

$$d(A)=\sqrt{3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2} \quad \text{eta} \quad d(B)=\sqrt{3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

Orduan, distantzia minimoa $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ da.

Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	Ariketa 8	Guztira 2. zatia

Azterketak 8 ariketa ditu 2 zatitan banatuta. Guztira 20 puntu dira eta azterketa gainditzeko 10 puntu atera behar dira.

Azterketaren iraupena: 3 ordu.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

5.- $\begin{cases} F(x,y,z,t)=e^{x-z}+yt+3=0 \\ G(x,y,z,t)=e^{y+t}-xz=0 \end{cases}$ sistema emanik:

a) egiaztatu x eta y aldagaiko z eta t funtzio inplizituak definitzen dituela $(x,y,z,t)=(1,2,1,\text{-}2)$ puntuaren ingurune batean.

b) aurkitu $z=z(x,y)$ funtzioaren gradientea (1,2) puntuan.

c) aurkitu $t=t(x,y)$ funtzioaren deribatu direkzionala (1,2) puntuan, $\vec{u}=(1,1)$ bektorearen norabidean.

3 puntu

a) i) $\begin{cases} F(1,2,1,-2)=e^0-4+3=0 \\ G(1,2,1,-2)=e^0-1=0 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} F'_x=e^{x-z} & F'_y=t & F'_z=-e^{x-z} & F'_t=y \\ G'_x=-z & G'_y=e^{y+t} & G'_z=-x & G'_t=e^{y+t} \end{cases}$ existitzen eta jarraituak dira $\mathbb{R}^4$ osoan.

iii) $\left|\dfrac{D(F,G)}{D(z,t)}\right|_{(1,2,1,-2)}=\begin{vmatrix} -e^{x-z} & y \\ -x & e^{y+t} \end{vmatrix}_{(1,2,1,-2)}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$

Orduan, (1,2,1,-2) puntuaren ingurune batean $\exists z=z(x,y)$ eta $\exists t=t(x,y)$, deribatu partzial jarraituekin, eta $z(1,2)=1$, $t(1,2)=-2$.

b) eta c) Atal bietarako z eta t funtzioen deribatu partzialak behar ditugu, hortaz, hasierako sisteman x eta y aldagaiekiko deribatuko dugu $z=z(x,y)$ eta $t=t(x,y)$ funtzioak dauzkagula kontuan izanik.

x-rekiko deribatuz eta (1,2,1,-2) puntuan ordezkatuz:

$$\begin{cases} 1 - z'_x(1,2) + 2t'_x(1,2) = 0 \\ -1 - z'_x(1,2) + t'_x(1,2) = 0 \end{cases} \underset{kenduz}{\Rightarrow} 2 + t'_x(1,2) = 0 \Leftrightarrow t'_x(1,2) = -2 \Rightarrow z'_x(1,2) = -3$$

Era berean, *y*-rekiko deribatuz eta (1,2,1,-2) puntuan ordezkatuz:

$$\begin{cases} -2 - z'_y(1,2) + 2t'_y(1,2) = 0 \\ 1 - z'_y(1,2) + t'_y(1,2) = 0 \end{cases} \underset{kenduz}{\Rightarrow} -3 + t'_y(1,2) = 0 \Leftrightarrow t'_y(1,2) = 3 \Rightarrow z'_y(1,2) = 4$$

Beraz, $\vec{\nabla} z(1,2) = z'_x(1,2) \cdot \vec{i} + z'_y(1,2) \cdot \vec{j} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$

$$\left. \frac{dt}{d\vec{u}} \right|_{(1,2)} = t'_x(1,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + t'_y(1,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(*t* diferentziagarria da deribatu partzial jarraituak baititu).

6.- Baldin S azalera finitua duen gainazal leuna bada, nola kalkulatzen da bere azalera hurrengo kasuetan?

a) $S \equiv \vec{r} = \vec{r}(u,v) \quad \text{non} \ (u,v) \in R_{uv}$

b) $S \equiv z = z(x,y) \quad \text{non} \ (x,y) \in R_{xy}$

c) $S \equiv x = x(y,z) \quad \text{non} \ (y,z) \in R_{yz}$

1.5 puntu

a) $\text{Azalera}(S) = \iint_{R_{uv}} \left| \vec{r}'_u \wedge \vec{r}'_v \right| du dv$

b) $\text{Azalera}(S) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy$

c) $\text{Azalera}(S) = \iint_{R_{yz}} \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2}\, dydz$

7.- Izan bedi $S_1 \equiv x^2 + z^2 = 2 - y$, $S_2 \equiv x^2 + z^2 = 1$ eta $S_3 \equiv x^2 + z^2 = (y+2)^2$ gainazalek osaturiko S gainazal itxia, eta har dezagun $\vec{V} = (y^3 + z^3)\cdot\vec{i} + (x^3 + z^3)\cdot\vec{j} + (x^3 + y^3)\cdot\vec{k}$ eremu bektorial. Kalkulatu:

a) S gainazalak mugaturiko bolumena.

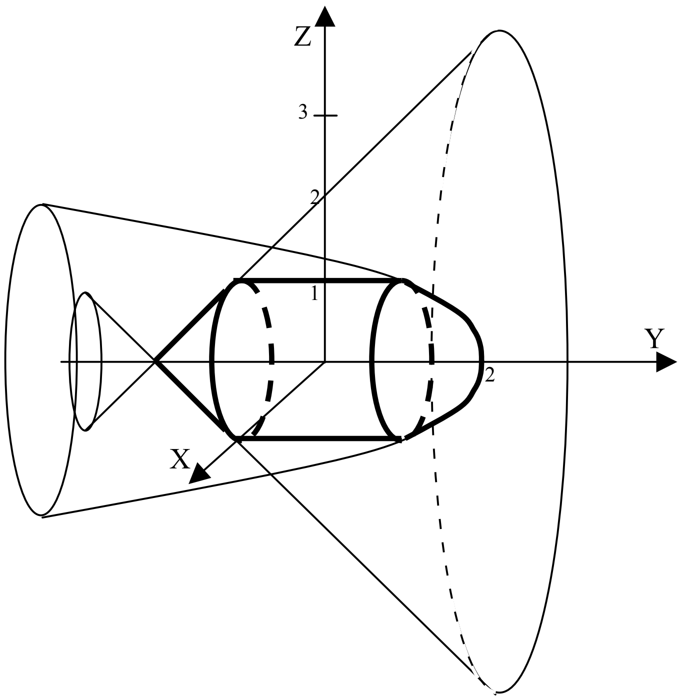
b) S gainazaletik irteten den $\vec{V}$ bektorearen errotazionalaren fluxua.

c) S gainazaleko S_2-ren zatitik irteten den $\vec{V}$ bektorearen errotazionalaren fluxua.

d) $\vec{V}$ bektorearen zirkulazioak $C_1 = S_1 \cap S_2$ eta $C_2 = S_2 \cap S_3$ kurben gainetik, noranzko positiboan ibilitakoak.

4 puntu

a)



Bolumena koordenatu zilindrikoetan adierazitako integral hirukoitzaren bidez kalkulatuko dugu:

$$\begin{cases} z = \rho\cos\theta \\ x = \rho\sin\theta \\ y = y \end{cases} \Rightarrow J = \rho,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le 1,\ y_{konoa} \le y \le y_{parabol}$$

non, $S_3 \equiv x^2 + z^2 = (y+2)^2 \quad \Rightarrow \quad y_{konoa} = -2 + \sqrt{x^2 + z^2} = \rho - 2$

eta $\quad S_1 \equiv x^2 + z^2 = 2 - y \quad \Rightarrow \quad y_{parabol} = 2 - (x^2 + z^2) = 2 - \rho^2$

Orduan: $B = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{\rho-2}^{2-\rho^2} \rho\, dy\, d\rho\, d\theta = 2\pi\int_0^1 \rho(2 - \rho^2 - \rho + 2)d\rho = 2\pi\int_0^1 \rho(4 - \rho^2 - \rho)d\rho =$

$$= 2\pi\left[2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 = \frac{17\pi}{6}$$

b) $\Phi_S\left(\overrightarrow{rot}(\vec{V})\right) \underset{S \text{ itxia} \Rightarrow \text{Gauss}}{=} \iiint\limits_B div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{V})\right)dxdydz = 0$

c) $\Phi_{S_2}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{V})\right) = \iint\limits_{S_2} \overrightarrow{rot}(\vec{V})d\vec{S}$

Hala ere, aurreko definizioa erabili beharrean, $S_4 \equiv y = 1$ eta $S_5 \equiv y = -1$ "estalkiak" jarriko dizkiogu zilindroari berriro gainazal itxia definitzeko: $S' = S_2 \cup S_4 \cup S_5$.

Honela, $\Phi_{S'}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{V})\right) = (\Phi_{S_2} + \Phi_{S_4} + \Phi_{S_5})\left(\overrightarrow{rot}(\vec{V})\right) \underset{S' \text{ itxia} \Rightarrow \text{Gauss}}{=} \iiint\limits_{B'} div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{V})\right)dxdydz = 0$

Bestalde, $\Phi_{S_4}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{V})\right) = \iint\limits_{S_4} \overrightarrow{rot}(\vec{V})d\vec{S}$

non $\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = (3y^2 - 3z^2)\cdot\vec{i} + (3z^2 - 3x^2)\cdot\vec{j} + (3x^2 - 3y^2)\cdot\vec{k}$

eta $S_4 \equiv y = 1 \Rightarrow dy = 0$, orduan:

$\Phi_{S_4}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{V})\right) = \iint\limits_{R_{xz}} (3z^2 - 3x^2)dzdx$ non $R_{xz} \equiv x^2 + z^2 \leq 1$.

Polarretan adierazita: $\begin{cases} z = \rho\cos\theta \\ x = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow J = \rho,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \rho \leq 1$

$$\Phi_{S_4}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{V})\right) = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3(\cos^2\theta - \sin^2\theta)d\rho d\theta = 3\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\cos(2\theta)d\theta = \frac{3}{4}\sin(2\theta)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Era berean, $\Phi_{S_5}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{V})\right) = \iint\limits_{S_5} \overrightarrow{rot}(\vec{V})d\vec{S} = -\iint\limits_{R_{xz}} (3z^2 - 3x^2)dzdx = 0$

Beraz, $\Phi_{S_2}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{V})\right) = 0$

d) $\oint\limits_{C_1} \vec{V}d\vec{r} \underset{C_1 \text{ itxia} \Rightarrow \text{Stokes}}{=} \iint\limits_{S_4} \overrightarrow{rot}(\vec{V})d\vec{S} = 0$ eta

$\oint\limits_{C_2} \vec{V}d\vec{r} \underset{C_2 \text{ itxia} \Rightarrow \text{Stokes}}{=} \iint\limits_{S_5} \overrightarrow{rot}(\vec{V})d\vec{S} = 0$

(aurreko atalean kalkulatutako integralak baitira)

8.- Kalkulatu $I=\int_C\left(\frac{dx}{9x^2+4y^2}+\frac{dy}{9x^2+4y^2}\right)$ lerro-integrala, $C\equiv 9x^2+4y^2=1$ kurban zehar noranzko positiboan ibilitakoa.

3 puntu

$$C\equiv 9x^2+4y^2=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1/9}+\frac{y^2}{1/4}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3}\cos t \\ y=\frac{1}{2}\sin t \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi \Rightarrow \begin{cases} dx=-\frac{1}{3}\sin t \\ dy=\frac{1}{2}\cos t \end{cases}$$

Orduan:

$$I=\int_C\left(\frac{dx}{9x^2+4y^2}+\frac{dy}{9x^2+4y^2}\right)=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}\sin t+\frac{1}{2}\cos t\right)dt=\left[\frac{1}{3}\cos t+\frac{1}{2}\sin t\right]_0^{2\pi}=0$$