Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	1. Zatia

Azterketak 7 ariketa ditu bi zatitan bananduta. Guztira 14 puntu dira eta azterketa gainditzeko 7 puntu atera behar dira.

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

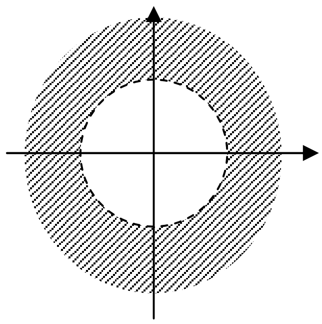
1.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y) = \frac{\mathrm{L}(x^2+y^2-3)}{\sqrt{xy-1}} + |y|\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$$

(1.5 puntu)

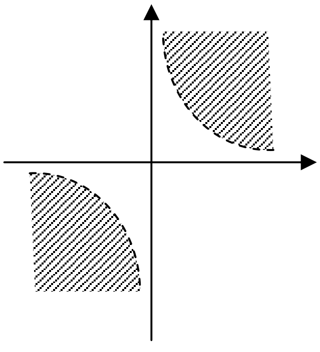
$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2-3>0,\ xy-1>0,\ \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \geq 0,\ x^2+y^2 \neq 0 \right\}$$

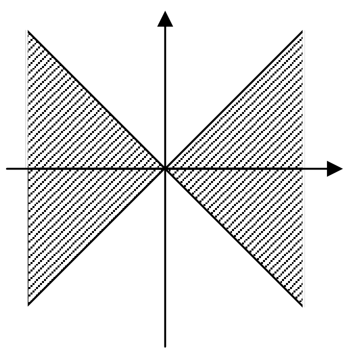
$x^2+y^2-3>0 \Leftrightarrow x^2+y^2>3$



$xy-1>0 \Leftrightarrow xy>1$

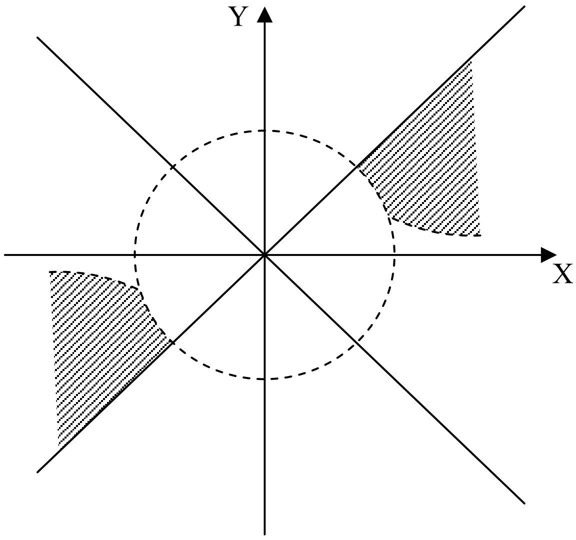
$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \geq 0 \Leftrightarrow x^2-y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq y^2 \Leftrightarrow |x| \geq |y|$$





$x^2 + y^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x, y) \neq (0,0)$

Eta zati guztien arteko ebakidura, honako definizio-eremua emango digu:



2.- $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{x^2+y} & \text{Baldin } \ y\neq -x^2\\ 1 & \text{Baldin } \ y=-x^2\end{cases}$ funtzioa emanik:

a) Aztertu *f* funtzioaren jarraitasuna (0,0) eta (1,-1) puntuetan.

b) Kalkulatu *f* funtzioaren deribatu partzialak (0,0) eta (1,-1) puntuetan.

c) Estudiatu *f* funtzioaren direntziagarritasuna (0,0) eta (1,-1) puntuetan.

(2.5 puntu)

a) $f(0,0)=1$ eta $f(1,-1)=1$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y}{x^2+y}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho\cdot\sin\theta}{\rho^2\cdot\cos^2\theta+\rho\cdot\sin\theta}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\rho\cdot\cos^2\theta+\sin\theta}=$$

$$=\begin{cases}1 & \forall\theta\neq 0,\pi\\ 0 & \text{Baldin } \theta=0,\pi\end{cases}\quad \text{non } \theta\in[0,2\pi). \text{ Orduan } \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{y}{x^2+y}=\pm\infty\quad\Rightarrow\quad\nexists\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y)$$

Beraz, *f* ez da jarraitua (0,0) eta (1,-1) puntuetan.

b) $$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2}-1}{h}=\pm\infty\quad\Rightarrow\quad\nexists f'_x(0,0)$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{k}{k}-1}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{1-1}{k}=0$$

$$f'_x(1,-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,-1)-f(1,-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-1}{(1+h)^2-1}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1-h^2-2h}{h^3+2h^2}=\pm\infty$$

$$\Rightarrow\quad\nexists f'_x(1,-1)$$

$$f'_y(1,-1)=\lim_{k\to 0}\frac{f(1,-1+k)-f(1,-1)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{-1+k}{1+(-1+k)}-1}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{-1}{k^2}=-\infty$$

c) (0,0) eta (1,-1) puntuetan *f* jarraitua ez denez, ezin da diferentziagarria izan.

3.- Izan bitez F eta f bi funtzio jarraitu deribatu jarraituekin, non $f(2)=1$ eta F-ren deribatu partzialak positiboak diren. G funtzio berria definituko dugu, hurrengo erara:

$$G(x,y)=F\left(\mathrm{L}(x)\cdot\mathrm{L}(y)\,,\,x\cdot f(x+y)\right)$$

Kalkulatu (1,1) puntuan G-ren deribatu partzialak. Zein da handiagoa?

(2 puntu)

$$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\rangle G=F\begin{matrix}\nearrow u\left\langle\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.\\ \searrow v\begin{matrix}\nearrow x\\ \searrow f-t\left\langle\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.\end{matrix}\end{matrix}$$

non $u=\mathrm{L}(x)\cdot\mathrm{L}(y)$, $v=x\cdot f(t)$ eta $t=x+y$. Orduan:

$$G'_x=F'_u\cdot u'_x+F'_v\cdot\left(v'_x+v'_f\cdot f'\cdot t'_x\right)=F'_u\cdot\frac{\mathrm{L}y}{x}+F'_v\cdot\left(f+x\cdot f'\right)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad G'_x(1,1)=F'_v(0,f(2))\cdot\left(f(2)+f'(2)\right)=F'_v(0,1)+F'_v(0,1)\cdot f'(2)$$

$$G'_y=F'_u\cdot u'_y+F'_v\cdot v'_f\cdot f'\cdot t'_y=F'_u\cdot\frac{\mathrm{L}x}{y}+F'_v\cdot x\cdot f'\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad G'_y(1,1)=F'_v(0,f(2))\cdot f'(2)=F'_v(0,1)\cdot f'(2)$$

Eta $G'_x(1,1)-G'_y(1,1)=F'_v(0,1)>0 \quad\Leftrightarrow\quad G'_x(1,1)>G'_y(1,1)$

4.- $F(x,y,z)=y^2z+x(\mathrm{L}z-1)-ex=0$ ekuazioa emanik,

a) Frogatu $P(1,-1,e)$ puntuaren ingurune batean aurreko ekuazioak x eta y aldagaiko z funtzio inplizitua definitzen duela.

b) Aurkitu (1,-1) puntuan norabidea zeinetan z-ren aldakuntza maximoa den.

c) Aurkitu (1,-1) puntuan norabidea zeinetan z-ren aldakuntza nulua den.

d) Aurkitu (1,-1) puntuan, puntu horretatik igarotzen den maila-kurbari dagokion zuzen ukitzailearen ekuazioa.

(2 puntu)

a) i) $F(P)=e+\mathrm{L}e-1-e=0$

ii)
$$\left.\begin{aligned} F'_x &= \mathrm{L}z-1-e \\ F'_y &= 2yz \\ F'_z &= y^2+\frac{x}{z} \end{aligned}\right\} \text{jarraituak dira } P \text{ puntuaren ingurunean non } z>0.$$

iii) $F'_z(P)=1+\dfrac{1}{e}\neq 0$

Orduan $\exists z=z(x,y)$ diferentziagarria eta $z(1,-1)=e$ delarik.

b) z-ren aldakuntza maximoa da bere gradientearen norabidean. Hau da:

$$\vec{\nabla}z(1,-1)=\left(z'_x(1,-1),z'_y(1,-1)\right)$$

$$\left.\begin{aligned} z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z} \quad &\Rightarrow \quad z'_x(1,-1)=-\frac{-e}{1+\frac{1}{e}}=\frac{e^2}{e+1} \\ z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z} \quad &\Rightarrow \quad z'_y(1,-1)=-\frac{-2e}{1+\frac{1}{e}}=\frac{2e^2}{e+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \vec{\nabla}z(1,-1)=\left(\frac{e^2}{e+1},\frac{2e^2}{e+1}\right).$$

Beraz, aldakuntza maximoa (1,2) norabidean izaten da.

c) z-ren aldakuntza minimoa da gradientearekiko norabide elkartzutan, hots, (2,-1).

d) Gradientea eta maila-kurba elkartzutak direnez, aurreko atalean lortutako norabidea izango da maila-kurbarena (bere zuzen ukitzailearena alegia):

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1} \\ z=e \end{cases} \equiv \begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}(x+1) \\ z=e \end{cases}$$

Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	2. Zatia

Azterketak 7 ariketa ditu bi zatitan bananduta. Guztira 14 puntu dira eta azterketa gainditzeko 7 puntu atera behar dira.

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

5.- $f(x,y)=x^2+y^2-2x+2y+2$ funtzioa emanik, aurkitu bere mutur absolutuak $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ \frac{1}{8}\le x^2+y^2\le 8\right\}$ multzoan.

(2 puntu)

Weierstraas-en teoremak ziurtatzen digu multzo itxi eta bornatuan funtzio jarraituak maximo eta minimo absolutuak dituela.

a) Puntu kritiko ez-baldintzatuak kalkulatzen hasiko gara:

$$\left.\begin{array}{l} f'_x=2x-2=0\Leftrightarrow x=1 \\ f'_y=2y+2=0\Leftrightarrow y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A(1,-1)\in M$$ puntu kritiko bakarra lortzen da.

b) Orain puntu kritiko baldintzatuak kalkulatuko ditugu, *M* multzoaren mugakoak hain zuzen ere. Beraz, bi kasu bereiziko ditugu:

(i) $x^2+y^2=8$ baldintza egiaztatzen dutenak.

$$w(x,y)=x^2+y^2-2x+2y+2+\lambda(x^2+y^2-8)$$

$$\left.\begin{array}{l} w'_x=2x-2+2\lambda x=0 \\ w'_y=2y+2+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda=\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{-1-y}{y} \quad\Leftrightarrow\quad y=-x \\ x^2+y^2=8 \end{array}\right. \Rightarrow \quad 2x^2=8\Rightarrow x=\pm 2$$

Hortaz, bi puntu kritiko ditugu mugaren zati horretan: *B*(2,-2) eta *C*(-2,2).

(ii) $x^2+y^2=\frac{1}{8}$ baldintza egiaztatzen dutenak.

$$w(x,y)=x^2+y^2-2x+2y+2+\lambda\left(x^2+y^2-\frac{1}{8}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} w'_x = 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ \\ w'_y = 2y + 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = \dfrac{1}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ \\ x^2 + y^2 = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \quad 2x^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{4}$$

Beraz, beste bi puntu kritiko gehiago ditugu: $D\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ eta $E\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Orain 5 puntu kritikoetan funtzioak hartzen duen balioa kalkulatuko dugu:

$f(A) = 0$

$f(B) = 2$

$f(C) = 18$

$f(D) = \dfrac{9}{8}$

$f(E) = \dfrac{25}{8}$

Hortaz, *A* minimo absolutua da eta *C* maximo absolutua.

6.- Izan bedi $S_1 \equiv z = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ eta $S_2 \equiv x^2+y^2+z^2=4$ gainazalek mugaturiko bolumenik txikiena. $\vec{F} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$ bektorea emanik:

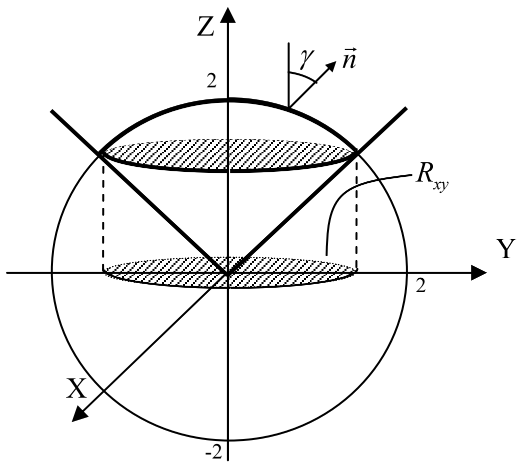
a) Kalkulatu bolumen hori mugatzen duen gainazal osoan zehar irtengo den fluxua.

b) Kalkulatu S_2 gainazalaren zatitik irtengo den fluxua.

(2 puntu)

Ikus dezagun zein planotan elkar ebakitzen duten S_1 eta S_2 gainazalek:

$$\left.\begin{array}{l} S_1 \equiv z = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \quad \Rightarrow \quad 3z^2 = x^2+y^2 \\ S_2 \equiv x^2+y^2+z^2=4 \quad \Rightarrow \quad 4-z^2 = x^2+y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad z^2 = 1 \quad \overset{(z>0)}{\Rightarrow} \quad z=1$$



a) Bolumenaren muga $S = S_1 \cup S_2$ gainazal itxia da.

$$\Phi_S = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} \underset{(Gauss)}{=} \iiint_V div\left(\vec{F}\right) dxdydz = 3\cdot\iiint_V dxdydz \overset{(*)}{=}$$

(*) Esferikoetan: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$ $J = \rho^2\sin\varphi \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}, \quad 0 \le \rho \le 2$

$$\overset{(*)}{=} 3\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^{2} \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta = 3\cdot 2\pi\cdot\frac{8}{3}\int_0^{\pi/3}\sin\varphi d\varphi = 16\pi\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi/3} = 16\pi\left(-\frac{1}{2}+1\right) = 8\pi$$

b) $\Phi_{S_2} = \iint_{S_2}(xdydz + ydzdx + zdxdy) = \pm\iint_{R_{xy}}(-x\cdot z'_x - y\cdot z'_y + z)dxdy$

non $z = \sqrt{4-x^2-y^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z'_x = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ z'_y = \dfrac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \end{cases}$ eta $R_{xy} \equiv x^2+y^2 \le 3$.

Beraz,

$$\Phi_{S_2} = \pm\iint_{R_{xy}} \left(\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} + \sqrt{4-x^2-y^2} \right) dxdy \underset{(\gamma<\frac{\pi}{2})}{=} \iint_{R_{xy}} \frac{4}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, dxdy \overset{(**)}{=}$$

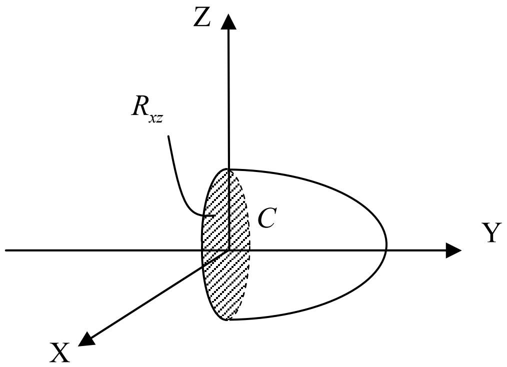
(**) <u>Polarretan</u>: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad J = \rho \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le \sqrt{3}$

$$\overset{(**)}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}\, d\rho d\theta = 2\pi\left(-4\sqrt{4-\rho^2}\right)_0^{\sqrt{3}} = -8\pi(1-2) = 8\pi$$

7.- a) Kalkulatu $y=0$ planoaren eskuinera dagoen $y=9-x^2-z^2$ gainazalaren zatiaren azalera.

b) Kalkulatu $\vec{F}=z\cdot\vec{i}+2x\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ eremu bektorialaren zirkulazioa $C\equiv\begin{cases}y=9-x^2-z^2\\ y=0\end{cases}$ kurbaren gainetik, noranzko positiboan ibilitakoa.

(2 puntu)



a) $\text{Azalera}(S)=\iint_{R_{xz}}\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz$

non $y=9-x^2-z^2 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}y'_x=-2x\\ y'_z=-2z\end{cases}$ eta $R_{xz}\equiv x^2+z^2\le 9$.

Beraz, <u>polarretan</u> adierazita, $\begin{cases}z=\rho\cos\theta\\ x=\rho\sin\theta\end{cases}$ $J=\rho \quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le\rho\le 3$:

$$\text{Azalera}(S)=\int_0^{2\pi}\int_0^3\rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho d\theta=2\pi\cdot\frac{1}{8}\cdot\left.\frac{\left(1+4\rho^2\right)^{3/2}}{3/2}\right|_0^3=\frac{\pi}{6}\cdot\left(37^{3/2}-1\right)$$

b) Bi eratan kalkula daiteke:

(i) Lerro-integrala zuzenean, C kurba parametrizatuz:

$$C\equiv\begin{cases}y=9-x^2-z^2\\ y=0\end{cases}\equiv\begin{cases}x^2+z^2=9\\ y=0\end{cases}\equiv\begin{cases}z=3\cos t\\ x=3\sin t\\ y=0\Rightarrow dy=0\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$$

$$\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}3\cos t\cdot 3\cos t\,dt=9\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2t)}{2}dt=\frac{9}{2}\left.\left(t+\frac{\sin(2t)}{2}\right)\right|_0^{2\pi}=9\pi$$

(ii) C kurba itxia denez, Stokes-en teorema erabil daiteke:

$$\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{r}\underset{(Stokes)}{=}\iint_S\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\,dS\underset{(y=0\Rightarrow dy=0)}{=}\pm\iint_{R_{xz}}(1-0)dzdx=\iint_{R_{xz}}dzdx=\text{Azalera}(R_{xz})=9\pi$$