Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	1. Zatia

Azterketak 7 ariketa ditu bi zatitan bananduta. Guztira 15 puntu dira eta azterketa gainditzeko 7.5 puntu atera behar dira.

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

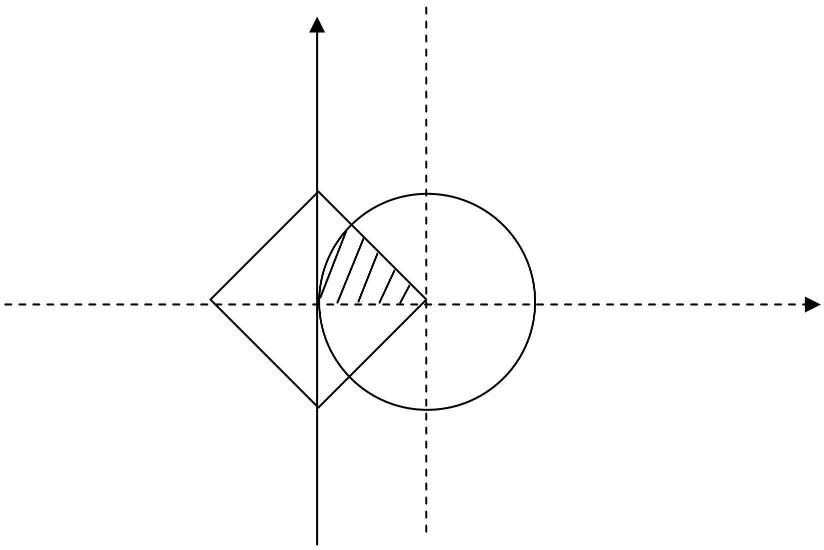
1.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y) = \mathrm{L}(y\cdot(1-x)) + \arcsin\left(|x|+|y|\right) + \sqrt{1-e^{x^2+y^2-2x}}$$

(1.5 puntu)

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y\cdot(1-x)>0,\ -1\le|x|+|y|\le 1,\ 1-e^{x^2+y^2-2x}\ge 0\right\}$$

- $y\cdot(1-x)>0 \Rightarrow \begin{cases} y>0 \quad \wedge \quad 1-x>0 \quad \Leftrightarrow \quad y>0 \quad \wedge \quad x<1 \\ y<0 \quad \wedge \quad 1-x<0 \quad \Leftrightarrow \quad y<0 \quad \wedge \quad x>1 \end{cases}$
- $-1\le|x|+|y|\le 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x|+|y|\le 1$
- $1-e^{x^2+y^2-2x}\ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x^2+y^2-2x}\le 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2-2x\le 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2+y^2\le 1$



2.- $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{\mathrm{L}(1-x^2-y^2)} & \text{Baldin} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ a & \text{Baldin} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik:**

a) Kalkulatu $a\in\mathbb{R}$ parametroaren balioa *f* jarraitua izan dadin (0,0) puntuan.

Aurreko atalean lortutako *a* parametroaren baliorako:
b) Kalkulatu *f* funtzioaren deribatu partzialak (0,0) puntuan.
c) Estudiatu *f* funtzioaren direntziagarritasuna (3,3) puntuan.

(1.5 puntu)

a) *f* jarraitua (0,0) puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$

$f(0,0)=a$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\mathrm{L}(1-x^2-y^2)}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^2}{\mathrm{L}(1-\rho^2)}\sim\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^2}{-\rho^2}=-1 \quad \forall\theta\in[0,2\pi]$$

Orduan, *f* jarraitua (0,0) puntuan $\Leftrightarrow a=-1$.

b) $$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{h^2}{\mathrm{L}(1-h^2)}-(-1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2+\mathrm{L}(1-h^2)}{h\cdot\mathrm{L}(1-h^2)}\sim$$

$$\sim\lim_{h\to0}\frac{h^2+\mathrm{L}(1-h^2)}{-h^3}\overset{(L'H)}{=}\lim_{h\to0}\frac{2h-\dfrac{2h}{1-h^2}}{-3h^2}=-\frac{2}{3}\lim_{h\to0}\frac{1-\dfrac{1}{1-h^2}}{h}=$$

$$=-\frac{2}{3}\lim_{h\to0}\frac{1-h^2-1}{h\cdot(1-h^2)}=\frac{2}{3}\lim_{h\to0}\frac{h}{1-h^2}=0$$

Eta simetriaz, $f'_y(0,0)=0$

c) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/1-x^2-y^2>0\right\}\cup\left\{(0,0)\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2<1\right\}\cup\left\{(0,0)\right\}$

Beraz $(3,3)\notin D \quad\Rightarrow\quad f$ ezin da diferentziagarria izan puntu horretan.

3.- Izan bedi $\begin{cases} u = f(x) + y \\ v = 7 \cdot g(y^2) + 2x \\ w = u + 2v^2 \end{cases}$ **sistema, non *f* eta *g* deribagarriak diren, deribatu jarraituarekin,** $f(0) = 0$**,** $g(0) = 0$ **eta** $f'(0) = 2$**.**

a) Frogatu aurreko sistemak $u = u(x, y)$**,** $v = v(x, y)$ **eta** $w = w(x, y)$ **funtzioak definitzen dituela** $(x, y) = (0, 0)$ **puntuan, puntu horretan *u*, *v* eta *w* aldagaien balioak determinatuz.**

b) Kalkulatu $w'_x(0,0)$ **eta** $w'_y(0,0)$

(2 puntu)

a) $\begin{cases} u = f(x) + y \\ v = 7 \cdot g(y^2) + 2x \\ w = u + 2v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x, y, u, v, w) = f(x) + y - u = 0 \\ G(x, y, u, v, w) = 7 \cdot g(y^2) + 2x - v = 0 \\ G(x, y, u, v, w) = u + 2v^2 - w = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} F(0, 0, u, v, w) = f(0) + 0 - u = 0 \Leftrightarrow u = 0 \\ G(0, 0, u, v, w) = 7 \cdot g(0) + 0 - v = 0 \Leftrightarrow v = 0 \\ G(0, 0, u, v, w) = 0 + 0 - w = 0 \Leftrightarrow w = 0 \end{cases}$

ii)

$$\begin{array}{lllll} F'_x = f'(x) & F'_y = 1 & F'_u = -1 & F'_v = 0 & F'_w = 0 \\ G'_x = 2 & G'_y = 14y \cdot g'(y^2) & G'_u = 0 & G'_v = -1 & G'_w = 0 \\ H'_x = 0 & H'_y = 0 & H'_u = 1 & H'_v = 4v & H'_w = -1 \end{array}$$

jarraituak dira $\mathbb{R}^5$ osoan.

iii) $\left| \dfrac{D(F, G, H)}{D(u, v, w)} \right|_P = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Orduan, $\exists \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ w = w(x, y) \end{cases}$ diferentziagarriak $P(x, y, u, v, w) = (0, 0, 0, 0, 0)$ puntuaren ingurune batean eta $\begin{cases} u(0, 0) = 0 \\ v(0, 0) = 0 \\ w(0, 0) = 0 \end{cases}$.

b) Hasierako sisteman *x*-rekiko deribatuz eta $P(x, y, u, v, w) = (0, 0, 0, 0, 0)$ puntuan ordezkatuz:

$$\begin{cases} f'(0) - u'_x(0, 0) = 0 \\ 2 - v'_x(0, 0) = 0 \\ u'_x(0, 0) - w'_x(0, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_x(0, 0) = f'(0) = 2 \\ v'_x(0, 0) = 2 \\ w'_x(0, 0) = u'_x(0, 0) = 2 \end{cases}$$

Era berean, *y*-rekiko deribatuz eta $P(x, y, u, v, w) = (0, 0, 0, 0, 0)$ puntuan ordezkatuz:

$$\begin{cases} 1 - u'_y(0, 0) = 0 \\ -v'_y(0, 0) = 0 \\ u'_y(0, 0) - w'_y(0, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_y(0, 0) = 1 \\ v'_y(0, 0) = 0 \\ w'_y(0, 0) = u'_y(0, 0) = 1 \end{cases}$$

4.- Metalezko xafla baten (x,y) puntuko tenperatura $T(x,y)=4x^2-4xy+y^2+20$ funtzioak adierazten du.
$t=0$ unean, inurri bat $(x,y)=(1,1)$ puntuan dago.

a) Zein norabide aukeratu behar du inurriak, tenperatura ahalik eta arinen jaisteko? Eta zein da tenperaturaren aldakuntza norabide horretan?

b) Baldin inurriak lekuz aldatzea erabakitzen badu $C\equiv\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ ibilbideari jarraituz, non x eta y $\begin{cases}y^2+e^{xt}-2=0\\ tx+2yx-y-1=0\end{cases}$ sistemak inplizituki definituriko funtzioak diren, zein izango da, orduan, tenperaturaren aldakuntza? Zer ondorioztatzen da lortutako ematzetik?

c) Diferentzialaren kontzeptua erabiliz, kalkulatu tenperaturaren balio hurbildua $(x,y)=(1.18,0.88)$ puntuan.

(3 puntu)

a) Norabidea non tenperatura arinen igoko den gradientearena da beraz, inurriak $-\vec{\nabla}T=(-T'_x,-T'_y)$ norabidea aukeratu behar du.

$$\left.\begin{array}{l}T'_x=8x-4y \quad\Rightarrow\quad T'_x(1,1)=4\\ T'_y=-4x+2y \quad\Rightarrow\quad T'_y(1,1)=-2\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad -\vec{\nabla}T(1,1)=(-4,2)$$

Eta tenperaturaren aldakuntza norabide horretan minus gradientearen modulua da:

$$-\left|\vec{\nabla}T(1,1)\right|=-\sqrt{16+4}=-\sqrt{20}=-2\sqrt{5}$$

Zeinu negatiboa atera zaigu tenperatura jaisten baita norabide horretan.

b) $C\equiv\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ ibilbidearen norabidea bere bektore ukitzaileak adierazten du, hau da $\vec{u}=(x'(t),y'(t))$, $t=0$ unean.

Deribatu hauek lortzeko $\begin{cases}y^2+e^{xt}-2=0\\ tx+2yx-y-1=0\end{cases}$ sisteman t-rekiko deribatu behar dugu:

$$\begin{cases}2y\cdot y'+(x'\cdot t+x)e^{xt}=0\\ x+t\cdot x'+2(y'\cdot x+y\cdot x')-y'=0\end{cases}$$

Eta orain $(x,y)=(1,1)$, $t=0$ balioetarako ordezkatuz:

$$\begin{cases}2\cdot y'(0)+1=0\\ 1+2(y'(0)+x'(0))-y'(0)=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}y'(0)=-\dfrac{1}{2}\\ x'(0)=-\dfrac{1}{4}\end{cases}.$$

Kalkulatu behar dugun tenperaturaren aldakuntza, deribatu direkzionalak adierazten digu:

$$\left.\frac{dT}{d\vec{u}}\right|_{(1,1)}=T'_x(1,1)\cdot h_1+T'_y(1,1)\cdot h_2,$$ non $\vec{u}=(h_1,h_2)$ unitarioa de (T diferentziagarria da).

Kasu honetan, $\vec{u}=\left(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad|\vec{u}|=\sqrt{\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{4}}=\sqrt{\dfrac{5}{16}}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}\quad\Rightarrow\quad\vec{u}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}},-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

Beraz, $\left.\dfrac{dT}{d\vec{u}}\right|_{(1,1)} = -4\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}} + 2\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}} = 0$.

Hau da, ez dagoenez tenperaturaren aldakuntzarik, C ibilbidea maila-kurba dela ondorioztatzen da. Izan ere, $\vec{u} = \left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{2}\right) \perp \vec{\nabla}T(1,1) = (-4,2)$ direnez, deribatu direkzionala kalkulatu gabe, emaitza nulua zela atera genezakeen.

c) $dT(1,1) \simeq \Delta T(1,1) = T(1.18, 0.88) - T(1,1) \quad \Rightarrow \quad T(1.18, 0.88) \simeq T(1,1) + dT(1,1)$

Eta $dT(1,1) = T'_x(1,1)\cdot dx + T'_y(1,1)\cdot dy = 4\cdot(0.18) - 2\cdot(-0.12) = 0.72 + 0.24 = 0.96$

Orduan, $T(1.18, 0.88) \simeq T(1,1) + dT(1,1) = 21 + 0.96 = 21.96$

Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	2. Zatia

Azterketak 7 ariketa ditu bi zatitan bananduta. Guztira 15 puntu dira eta azterketa gainditzeko 7.5 puntu atera behar dira.

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

5.- Aurkitu $f(x,y)=x^2+2x+y^2$ funtzioaren maximo eta minimo absolutuak $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\; x^2+4y^2\le 24\right\}$ multzoan.

(2 puntu)

Funtzio jarraitua multzo itxi eta mugatuan dugunez, Weierstrass-en teoremak maximo eta minimo absolutuak existitzen direla multzo horretan ziurtatzen digu

Hasteko, baldintzarik gabeko puntu kritikoak kalkulatuko ditugu:

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 2x+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1 \\ f'_y = 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A(-1,0)\in M \text{ puntu kritiko bakarra lortzen dugu.}$$

Orain puntu kritiko baldintzatuak aurkitu ditugu, *M*-ren mugan daudenak alegia. Horretarako Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliko dugu:

$$w(x,y)=x^2+2x+y^2+\lambda(x^2+4y^2-24)$$

$$\begin{cases} w'_x = 2x+2+2\lambda x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+1+\lambda x = 0 \\ w'_y = 2y+8\lambda y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y+4\lambda y = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y=0 \\ \lambda = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \\ x^2+4y^2=24 \end{cases}$$

Baldin $y=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=24 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{24}$

Baldin

$$\lambda=-\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{4}x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{16}{9}+4y^2=24 \quad \Leftrightarrow \quad y^2=\frac{50}{9} \quad \Rightarrow \quad y=\pm\frac{5\sqrt{2}}{3}$$

Beraz, $B=\left(\sqrt{24},0\right)$, $C=\left(-\sqrt{24},0\right)$, $D=\left(-\frac{4}{3},\frac{5\sqrt{2}}{3}\right)$, $E=\left(-\frac{4}{3},-\frac{5\sqrt{2}}{3}\right)$ puntu kritikoak lortzen ditugu.

Orain lortutako bost puntu kritikoetan f funtzioa balioesten dugu:
$f(A)=-1$, $f(B)=24+2\sqrt{24}$, $f(B)=24-2\sqrt{24}$, $f(D)=\frac{14}{3}$, $f(E)=\frac{14}{3}$.

Beraz, *A* minimo absolutua da eta *B* maximo absolutua.

6.- Izan bedi $\int_{x}^{2x} f(t)dt = 2x\cdot f(2x) - x\cdot f(x) - x$ ekuazioa egiaztatzen duen $y = f(x)$ funtzio deribagarria. Baldin $f'(2) = \frac{1}{2}$, kalkulatu $f'(1)$.

(Puntu 1)

$\int_{x}^{2x} f(t)dt = 2x\cdot f(2x) - x\cdot f(x) - x$ ekuazioan *x*-rekiko deribatuko dugu:

$$2\cdot f(2x) - f(x) = 2\cdot f(2x) + 4x\cdot f'(2x) - f(x) - x\cdot f'(x) - 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x\cdot f'(2x) - x\cdot f'(x) - 1 = 0$$

Eta $x = 1$ puntuan ordezkatuz:

$$4\cdot f'(2) - f'(1) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(1) = 4\cdot f'(2) - 1 = 4\cdot\frac{1}{2} - 1 = 1$$

7.- Izan bedi $S_1 \equiv x^2 + y^2 = -2(z-1)$ eta $S_2 \equiv x^2 + y^2 = 2z$ gainazalek mugaturiko *V* solidoa.
a) Kalkulatu solido horren bolumen.
b) Kalkulatu *V* solidoaren mugako S_1 zatiaren azalera.

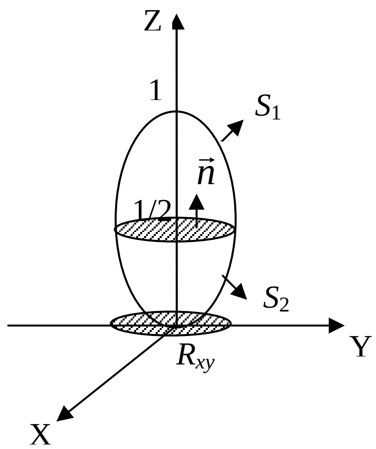
$\vec{F} = -x \cdot \vec{i} - y \cdot \vec{j} + 4z \cdot \vec{k}$ **bektorea emanik:**

c) Kalkulatu solidoaren muga osoan zehar irtengo den $\vec{F}$ bektorearen fluxua.
d) Kalkulatu S_2 gainazalaren zatitik irtengo den $\vec{F}$ bektorearen fluxua.
e) Kalkulatu $\vec{F}$ bektorearen lerro-integrala, lehenengo oktantean kokaturiko S_1 eta S_2 gainazalen arteko ebakidura-kurban zehar.

(4 puntu)

a) $S_1 \equiv z = 1 - \dfrac{x^2+y^2}{2}$ eta $S_2 \equiv z = \dfrac{x^2+y^2}{2}$ gainazalen arteko ebakidura kalkulatzen hasiko gara:

$$-2(z-1) = 2z \quad \Leftrightarrow \quad 4z = 2 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{2}$$



Bolumena zilindrikoetan planteatuko dugu:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \quad |J| = \rho \\ z = z \end{cases}$$

$$0 \le \theta \le 2\pi \quad 0 \le \rho \le 1 \quad \frac{\rho^2}{2} \le z \le 1 - \frac{\rho^2}{2}$$

Orduan, $\text{Bolumena}(V) = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{1-\frac{\rho^2}{2}} \rho\, dz\, d\rho d\theta = 2\pi\int_0^1 \rho\left(1-\rho^2\right) d\rho = 2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

b) $\text{Azalera}\left(S_1\right) = \displaystyle\iint_{R_{xy}} \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy \overset{(*)}{=}$

(1) non $R_{xy} \equiv x^2 + y^2 \le 1$ eta $z = 1 - \dfrac{x^2+y^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z'_x = -x \\ z'_y = -y \end{cases}$

$$\overset{(1)}{=} \iint_{R_{xy}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy \overset{(2)}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho\, d\theta = 2\pi\left[\frac{\left(1+\rho^2\right)^{3/2}}{3}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}\left(2^{3/2}-1\right)$$

(2) polarretan: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ $\quad |J| = \rho \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad 0 \le \rho \le 1$

c) Solidoaren muga $S = S_1 \cup S_2$ gainazal itxia denez, orduan Gauss-en teorema aplika daiteke:

$$\Phi_S = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = \iiint_V div\left(\vec{F}\right)dxdydz = \iiint_V (-1-1+4)dxdydz = 2\cdot\text{Bolumena}(V) = \pi$$

d) $\Phi_{S_2} = \iint_{S_2} (-xdydz - ydzdx + 4zdxdy) \overset{(3)}{=} \pm \iint_{R_{xy}} \left[x^2 + y^2 + 2\left(x^2+y^2\right)\right]dxdy \overset{\left(\gamma > \frac{\pi}{2}\right)}{=}$

(3) non $S_2 \equiv z = \dfrac{x^2+y^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z'_x = -x \\ z'_y = -y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{N}(-x,-y,1)$

$$= -3\iint_{R_{xy}} \left(x^2+y^2\right)dxdy \overset{(1)\text{ eta }(2)}{=} -3\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\cdot\rho^2 d\rho\, d\theta = -3\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4} = -\frac{3\pi}{2}$$

<u>Beste era batera</u>:

$S_4 = S_2 \cup S_3$ non $S_3 \equiv z = \dfrac{1}{2}$ gainazal itxi berria definituko dugu. Gainazal honek mugatzen duen solidoaren bolumena (V') hasieran definituriko V-ren erdia da. Orduan, c) atalean azaldu dugun bezala:

$$\Phi_{S_4} = \Phi_{S_2} + \Phi_{S_3} = \iiint_{V'} div\left(\vec{F}\right)dxdydz = 2\cdot\text{Bolumena}(V') = 2\cdot\frac{\text{Bolumena}(V)}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Eta $\Phi_{S_2} = \iint_{S_3} (-xdydz - ydzdx + 4zdxdy) \overset{(4)}{=} \pm \iint_{R_{xy}} 2dxdy \overset{(\gamma = 0 < \pi)}{=} 2\cdot\text{Azalera}\left(R_{xy}\right) = 2\pi$

(4) $S_3 \equiv z = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad dz = 0$

Orduan, $\Phi_{S_2}\Phi_{S_4} - \Phi_{S_3} = \dfrac{\pi}{2} - 2\pi = -\dfrac{3\pi}{2}$

e) $C = S_1 \cap S_2 \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases} \equiv \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \quad (x \ge 0 \text{ eta } y \ge 0) \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Orduan: $\displaystyle\int_C \vec{F}d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} (\cos t\cdot\sin t - \sin t\cdot\cos t))dt = 0$