Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	1. Zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

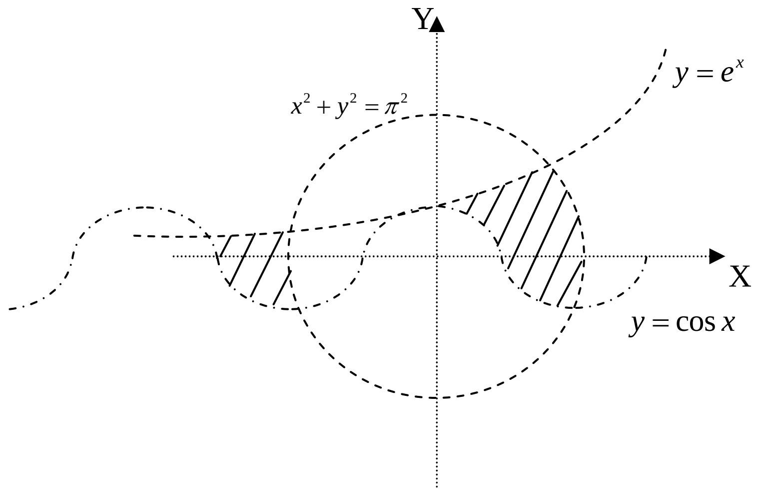
$$f(x,y)=\frac{\mathrm{L}(x\cdot(\pi^2-x^2-y^2))}{\sqrt{e^x-y}\cdot\sqrt{y-\cos x}}\cdot\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

(2 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x\cdot(\pi^2-x^2-y^2)>0,\ e^x-y>0,\ y-\cos x>0,\ y\neq 0\right\}$$

$$\left.\begin{array}{lll} e^x-y>0 & \Leftrightarrow & y<e^x \\ y-\cos x>0 & \Leftrightarrow & y>\cos x \end{array}\right\}\Rightarrow\quad \cos x<y<e^x$$

$$x\cdot(\pi^2-x^2-y^2)>0\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l} x>0\quad\wedge\quad \pi^2-x^2-y^2>0 \\ \qquad\qquad\vee \\ x<0\quad\wedge\quad \pi^2-x^2-y^2<0 \end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l} x>0\quad\wedge\quad x^2+y^2<\pi^2 \\ \qquad\qquad\vee \\ x<0\quad\wedge\quad x^2+y^2>\pi^2 \end{array}\right.$$



2.- $f(x,y) = \begin{cases} y + \cos\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right) & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **funtzioa emanik:**

- **a) Estudiatu bere jarraitutasuna (0,0) puntuan.**
- **b) Kalkulatu $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$.**
- **c) Estudiatu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.**

(1.5 puntu)

a) Jarraitutasuna (0,0) puntuan:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[y + \cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\right] = 0 + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) =$$

$$\overset{(\text{polarretan})}{=} \lim_{\rho\to 0^+} \cos\left(\frac{\rho^2 \cos\theta \cdot \sin\theta}{\rho^2}\right) = \cos\left(\cos\theta \cdot \sin\theta\right) \neq 1 = f(0,0)$$

Beraz, *f* ez da jarraitua (0,0) puntuan.

b) $$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos\left(\dfrac{0}{h^2}\right) - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{k + \cos\left(\dfrac{0}{k^2}\right) - 1}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{k+1-1}{k} = 1$$

c) *f* jarraitua ez denez (0,0) puntuan, orduan ezin da diferentziagarria izan (0,0) puntuan.

3.- $\begin{cases} x-3xy+2z-t=0 \\ y-t=0 \\ z+2t=0 \end{cases}$ **ekuazio-sistema emanik:**

a) Estudiatu ea *x* aldagaiko *y, z* eta *t* funtzio inplizituak ($y=y(x)$**,** $z=z(x)$**,** $t=t(x)$ **alegia) definitzen dituen** $P(x,y,z,t)=(-2,2,-4,2)$ **puntuaren ingurune batean.**

b) Aurkitu $z=z(x)$ **funtzioak adierazten duen kurbari dagokion zuzen ukitzailearen ekuazioa** $x=-2$ **puntuan.**

(2 puntu)

a) Ikus dezagun ea $\begin{cases} F(x,y,z,t)=x-3xy+2z-t=0 \\ G(x,y,z,t)=y-t=0 \\ H(x,y,z,t)=z+2t=0 \end{cases}$ sistemak funtzio inplizituaren teorema egiaztatzen duen $P(x,y,z,t)=(-2,2,-4,2)$ puntuaren ingurune batean:

I. $\begin{cases} F(P)=-2+12-8-2=0 \\ G(P)=2-2=0 \\ H(P)=-4+4=0 \end{cases}$

II. *F*, *G* eta *H* funtzioen deribatu partzialak existitzen eta jarraituak dira $\mathbb{R}^4$ osoan:

$$\begin{array}{llll} F'_x=1-3y & F'_y=-3x & F'_z=2 & F'_t=-1 \\ G'_x=0 & G'_y=1 & G'_z=0 & G'_t=-1 \\ H'_x=0 & H'_y=0 & H'_z=1 & H'_t=2 \end{array}$$

III. $\left|\dfrac{D(F,G,H)}{D(y,z,t)}\right|_P = \begin{vmatrix} -3x & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1+6-4=1\neq 0$

Beraz, $\exists \begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \\ t=t(x) \end{cases}$ diferentziagarriak, eta $\begin{cases} y(-2)=2 \\ z(-2)=-4 \\ t(-2)=2 \end{cases}$

b) $z=z(x)$ kurbari dagokion zuzen ukitzailearen ekuazioa $x=-2$ puntuan:

$$z-z(-2)=z'(-2)\cdot(x+2) \quad\Leftrightarrow\quad z+4=z'(-2)\cdot(x+2)$$

Beraz, malda lortzeko, emandako sisteman *x*-rekiko deribatuko dugu:

$$\begin{cases} 1-3y-3x\cdot y'+2z'-t'=0 \\ y'-t'=0 \\ z'+2t'=0 \end{cases} \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \begin{cases} 6y'(-2)+2z'(-2)-t'(-2)=5 \\ y'(-2)-t'(-2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad y'(-2)=t'(-2) \\ z'(-2)+2t'(-2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad z'(-2)=-2t'(-2) \end{cases} \overset{1.ekuazioan}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\quad 6t'(-2)-4t'(-2)-t'(-2)=5 \quad\Leftrightarrow\quad t'(-2)=5 \quad\Rightarrow\quad z'(-2)=-10$$

Orduan, zuzen ukitzailea: $z+4=-10\cdot(x+2) \quad\Leftrightarrow\quad z=-10x-24$

4.- Izan bitez $g = g(x\cdot y)$ hertsiki positiboa eta $f(x,y) = \int_0^{x^2-y} g(x\cdot y)\cdot\frac{\cos t}{t+1}dt$, biak diferentziagarriak.

a) Aurkitu *f* -ren gradientea $(x,y)=(1,1)$ puntuan.

b) $\vec{u}=(h_1,h_2)$ bektore unitarioa emanik, edozein, $\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(1,1)} = 4\cdot g(1)$ izan daiteke?

(1.5 puntu)

a) $\overrightarrow{\nabla f}(1,1) = f'_x(1,1)\cdot\vec{i} + f'_y(1,1)\cdot\vec{j}$

f integral parametrikoa denez, deribazio parametrikoa erabiliko dugu bere deribatu partzialak kalkulatzeko:

$$f'_x = \int_0^{x^2-y} y\cdot g'(x\cdot y)\cdot\frac{\cos t}{t+1}dt + 2x\cdot g(x\cdot y)\cdot\frac{\cos(x^2-y)}{x^2-y+1} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad f'_x(1,1) = \int_0^0 g'(1)\cdot\frac{\cos t}{t+1}dt + 2\cdot g(1)\cdot\cos(0) = 2\cdot g(1)$$

$$f'_y = \int_0^{x^2-y} x\cdot g'(x\cdot y)\cdot\frac{\cos t}{t+1}dt - g(x\cdot y)\cdot\frac{\cos(x^2-y)}{x^2-y+1} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad f'_y(1,1) = \int_0^0 g'(1)\cdot\frac{\cos t}{t+1}dt - g(1)\cdot\cos(0) = -g(1)$$

Beraz, $\overrightarrow{\nabla f}(1,1) = 2g(1)\cdot\vec{i} - g(1)\cdot\vec{j} = (2g(1),-g(1))$

b) $\vec{u}=(h_1,h_2)$ bektore unitarioa emanik, $\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(1,1)}$ *f*-ren deribatu direkzionala (1,1) puntuan da (*f*-ren aldakuntza $\vec{u}=(h_1,h_2)$ bektorearen norabidean adierazten duena alegia).

Gradientearen norabidean, berriz, *f*-ren aldakuntza maximoa lortzen dugu, eta bere balioa bere modulua da. Hortaz, $\left|\overrightarrow{\nabla f}(1,1)\right| = \sqrt{4\cdot\left(g(1)\right)^2+\left(g(1)\right)^2} \overset{(*)}{=} g(1)\cdot\sqrt{5}$

Eta $\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(1,1)} = 4\cdot g(1) > g(1)\cdot\sqrt{5} = \left|\overrightarrow{\nabla f}(1,1)\right|$

Beraz, ezinezkoa da.

(*) *g* hertsiki positiboa baita.

Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	2. Zatia

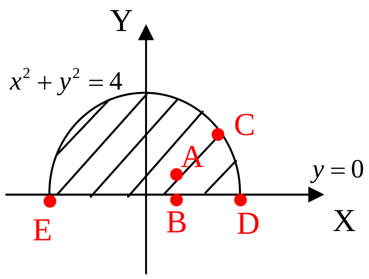
Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

5.- Aurkitu $f(x,y)=x^2+y^2-x-y-1$ **funtzioaren mutur absolutuak** $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\right\}$ **multzoan.**

(2 puntu)



f funtzio jarraitua da *M* multzo itxi eta mugatuan, orduan Weiestrass-en teoremak ziurtatzen digu multzo horretan *f*-ren maximo eta minimo absolutuak existitzen direla.

a) *f*-ren puntu kritiko ez-baldintzatuak kalkulatzen hasiko gara:

$$\left.\begin{cases} f'_x=2x-1=0 & \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{1}{2} \\ f'_y=2y-1=0 & \Leftrightarrow \quad y=\dfrac{1}{2} \end{cases}\right\rangle \Rightarrow \quad A=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\in M \text{ puntu kritikoa da.}$$

b) Orain, *f*-ren puntu kritiko baldintzatuak (*M* multzoaren mugan daudenak) kalkulatuko ditugu. *M*-ren muga bi zatitan bananduta dagoenez, bakoitza baldintza baten bitartez adierazita dagoena, hiru kasu bereiziko ditugu:

b.1) $y=0 \quad \Rightarrow \quad f(x,0)=F(x)=x^2-x-1 \quad \Rightarrow \quad F'(x)=2x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{1}{2}$

Eta $B=\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ puntu kritikoa lortzen dugu.

b.2) $x^2+y^2=4 \quad \Rightarrow \quad w(x,y)=x^2+y^2-x-y-1+\lambda(x^2+y^2-4)$ funtzioa dugu Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiltzeko. Honela:

$$\left.\begin{cases} w'_x = 2x-1+2\lambda x = 0 \Leftrightarrow 2x(1+\lambda)-1=0 \\ w'_y = 2y-1+2\lambda y = 0 \Leftrightarrow 2y(1+\lambda)-1=0 \end{cases}\right\rangle \overset{(*)}{\Rightarrow} 1+\lambda = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2y} \Leftrightarrow x = y \Bigg\rangle \Rightarrow$$
$$x^2+y^2=4$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2} \quad \overset{y\geq 0}{\Rightarrow} \quad y = \sqrt{2}$$

Beraz, $C = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ puntu kritikoa dugu.

b.3) Mugaren zati bien arteko ebaki-puntuak ere kontuan hartu behar dira (hau da, baldintza biak batera egiaztatzen dituztenak): $x^2+y^2=4 \ \wedge \ y=0$

Hortik $D=(2,0)$ eta $E=(-2,0)$ puntuak ditugu.

Puntu hauetan guztietan *f*-ren balioak konparatuz:

$$f(A) = -\frac{3}{2} \quad f(B) = -\frac{5}{4} \quad f(C) = 3-2\sqrt{2} \quad f(D) = 1 \quad f(E) = 5$$

Beraz, *A* minimo eta *E* maximo absolutuak dira.

(*) Baldin $x = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 = 0$

6.- $\vec{F}=(4z+2y)\cdot\vec{i}+(5x+2z)\cdot\vec{j}+(2x+3y)\cdot\vec{k}$ **eremu bektoriala emanik, kalkulatu bere zirkulazioa** $z=0$ **planoan kokaturiko kurba leuna edo zatika leuna eta itxian zehar, 10** u^2 **azalerako eskualdea mugatzen duena.**

(2 puntu)

Stokes-en teoremaren baldintzak egiaztatzen dira, orduan:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\cdot d\vec{S}$$

C kurba leuna edo zatika leuna eta itxia da, $z=0$ planoan kokaturikoa beraz:

$$S\equiv z=0 \quad \forall(x,y)\in R_{xy}\text{ , non Azalera}\left(R_{xy}\right)=10$$

$$\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}=\vec{i}+2\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k} \quad\Rightarrow\quad \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\cdot d\vec{S}=\iint_S\left(dydz+2dzdx+3dxdy\right)\overset{(*)}{=}$$

$$\left(z=0\Rightarrow dz=0\right)\rightarrow=\iint_{R_{xy}}3dxdy=3\cdot\text{Azalera}\left(R_{xy}\right)=30$$

(*) Edo: $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\cdot d\vec{S}=\pm\iint_{R_{xy}} \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\cdot\vec{N}\,dxdy$, non $\vec{N}=(0,0,1)\perp S$ eta zeinu positiboarekin $\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ aukeratuz (C kurba noranzko positiboan ibilitako suposatuz alegia).

7.- Izan bedi hurrengo erara definituriko *V* solidoa:

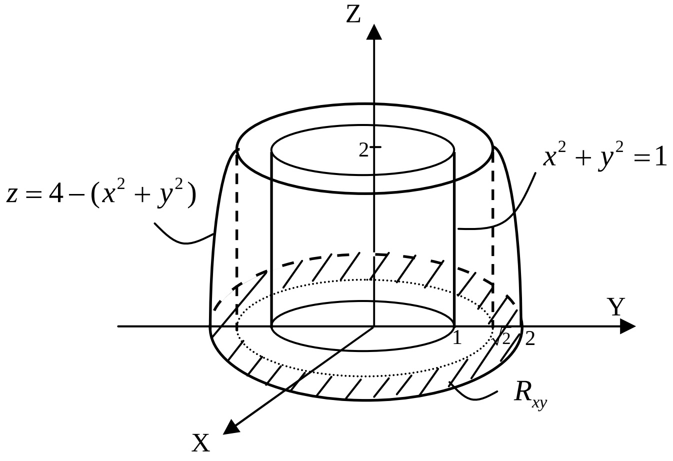
$$V \equiv \begin{cases} z \geq 0 \\ z \leq 2 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \\ z \leq 4 - (x^2 + y^2) \end{cases}$$

a) **Kalkulatu solido honen bolumena.**

b) **Aurkitu *V* solidoa mugatzen duen $z = 4 - (x^2 + y^2)$ gainazalaren zatiaren azalera.**

(3 puntu)

a)



Zilindrikoetan:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \geq 1 \\ z \leq 4 - \left(x^2 + y^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad z \leq 4 - \rho^2 \quad \Rightarrow \quad \rho \leq \sqrt{4 - z} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V \equiv \left\{0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq z \leq 2 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \rho \leq \sqrt{4 - z}\right\}$$

$$\text{Bolumena}\left(V\right) = \iiint_V dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_1^{\sqrt{4-z}} \rho d\rho\, dz\, d\theta = 2\pi \cdot \int_0^2 \left(\frac{4-z}{2} - \frac{1}{2}\right) dz =$$

$$= \pi \cdot \int_0^2 (3 - z)\, dz = \pi \cdot \left(3z - \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = 4\pi$$

b) $\text{Azalera}\left(S\right) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}$

non $S \equiv z = 4 - \left(x^2 + y^2\right) \quad \forall (x, y) \in R_{xy} \equiv 2 \overset{(*)}{\leq} x^2 + y^2 \leq 4 \quad \Rightarrow \quad z'_x = -2x$ eta $z'_y = -2y$

beraz:

$$\text{Azalera}(S) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}\,dxdy$$

Polarretan: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ $\quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad R_{xy} \equiv \left[0 \le \theta \le 2\pi \quad \sqrt{2} \le \rho \le 2\right]$

Orduan:

$$\text{Azalera}(S) = \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}}^{2} \rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho\,d\theta = 2\pi\left[\frac{\left(1+4\rho^2\right)^{3/2}}{3/2}\cdot\frac{1}{8}\right]_{\sqrt{2}}^{2} = \frac{\pi}{6}\left[17^{3/2}-9^{3/2}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[17\sqrt{17}-27\right]$$

(*) $\begin{cases} z = 2 \\ z = 4-(x^2+y^2) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 = 2$