Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	1. Zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y) = \mathrm{L}\left[(x^2+y^2-4x-4y+6)\cdot(xy-1)\right]$$

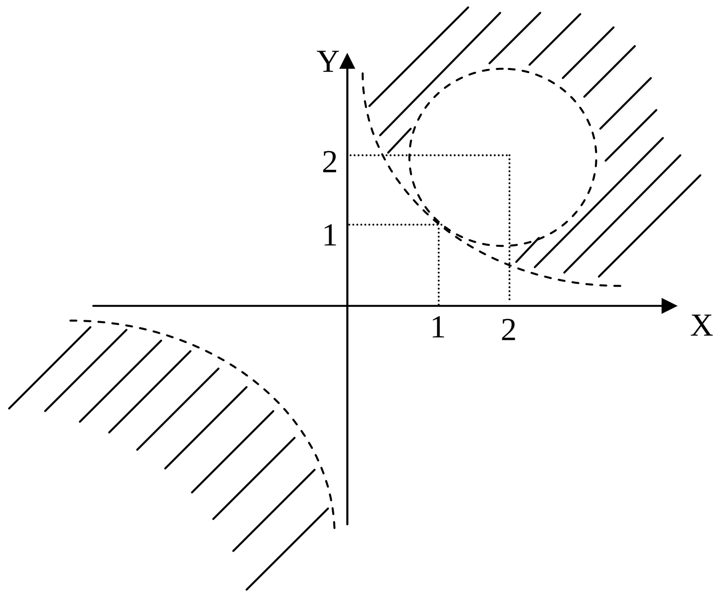
(2 puntu)

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, (x^2+y^2-4x-4y+6)\cdot(xy-1)>0\right\}$$

$$(x^2+y^2-4x-4y+6)\cdot(xy-1)>0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x^2+y^2-4x-4y+6>0 \quad \wedge \quad xy-1>0 \\ \vee \\ x^2+y^2-4x-4y+6<0 \quad \wedge \quad xy-1<0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$(*)\;\; x^2+y^2-4x-4y+6=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-2)^2+(y-2)^2=2$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2>2 \quad \wedge \quad xy>1 \\ (x-2)^2+(y-2)^2<2 \quad \wedge \quad xy<1 \quad \Leftrightarrow \quad \varnothing \end{cases}$$



2.- $f(x,y)=\begin{cases} e^{\frac{xy}{x^2+y^2}} & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik:**

a) Estudiatu bere jarraitutasuna (0,0) puntuan.

b) Kalkulatu $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$.

c) Estudiatu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.

d) Aztertu f'_x eta f'_y deribatuen jarraitutasuna (0,0) puntuan.

(1.5 puntu)

a) Jarraitutasuna (0,0) puntuan:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{xy}{x^2+y^2}} \overset{\text{(polarretan)}}{=} \lim_{\rho\to0^+} e^{\frac{\rho^2\cos\theta\cdot\sin\theta}{\rho^2}} = e^{\cos\theta\cdot\sin\theta}\neq 1 = f(0,0)$$

Beraz, *f* ez da jarraitua (0,0) puntuan.

b) $f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{e^{\frac{0}{h^2}}-1}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{1-1}{h}=0$

$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\dfrac{e^{\frac{0}{k^2}}-1}{k}=\lim_{k\to0}\dfrac{1-1}{k}=0$

c) *f* jarraitua ez denez (0,0) puntuan, orduan ezin da diferentziagarria izan (0,0) puntuan.

d) *f* diferentziagarria ez denez (0,0) puntuan, orduan deribatu partzialak ezin dira jarraituak izan (0,0) puntuan.

3.- Garoñan gertatutako istripu erradioaktiboaren ondoren egindako neurketetan, kutsadura-maila $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$ funtzioak ematen duela lortu da, x eta y koordenatu geografikoak direlarik. Baldin gure koordenatu geografikoak (1,3) badira:

a) Zein norabide eta noranzko aukeratu beharko genuke kutsadura-maila ahalik eta arinen jaisteko?

b) $\begin{cases} F(x,y,t)=x^2-xy^2+t+8=0 \\ G(x,y,t)=e^{t^2}+xy-4=0 \end{cases}$ **ekuazio-sistemak** $(x,y,t)=(1,3,0)$ **puntuan** $C\equiv\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ **planoko kurba definitzen du. Zein izango litzateke kutsadura-mailaren aldakuntza kurba horren norabidea hartuko bagenu?**

(3 puntu)

a) Kutsadura-maila ahalik eta arinen jaitsiko da $-\overrightarrow{\nabla f}(1,3)=-f'_x(1,3)\cdot\vec{i}-f'_y(1,3)\cdot\vec{j}$ bektoreak adierazitako norabide eta noranzkoan.

$$\left.\begin{array}{l} f'_x=-2x\cdot e^{-(x^2+y^2)} \quad\Rightarrow\quad f'_x(1,3)=-2\cdot e^{-10} \\ f'_y=-2y\cdot e^{-(x^2+y^2)} \quad\Rightarrow\quad f'_y(1,3)=-6\cdot e^{-10} \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad -\overrightarrow{\nabla f}(1,3)=\frac{2}{e^{10}}\cdot\vec{i}+\frac{6}{e^{10}}\cdot\vec{j}$$

b) $C\equiv\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ kurbaren norabidea $\vec{u}=\left(x'(t),y'(t)\right)$ bektore-ukitzaileak adierazitakoa da, eta kutsadura-mailaren aldakuntza norabide horretan $\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(1,3)}$ deribatu direkzionalak emango du. Beraz, sisteman t-rekiko deribatuz eta $(x,y,t)=(1,3,0)$ puntuan ordezkatuz:

$$\begin{cases} 2x\cdot x'(t)-x'(t)\cdot y^2-2xy\cdot y'(t)+1=0 \\ 2t\cdot e^{t^2}+x'(t)\cdot y+x\cdot y'(t)=0 \end{cases} \overset{(1,3,0)}{\Rightarrow} \begin{cases} 2\cdot x'(0)-9\cdot x'(0)-6\cdot y'(0)+1=0 \\ 3\cdot x'(0)+y'(0)=0 \quad\Leftrightarrow\quad y'(0)=-3\cdot x'(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad 1-7\cdot x'(0)+18\cdot x'(0)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x'(0)=-\frac{1}{11} \quad\Rightarrow\quad y'(0)=\frac{3}{11} \quad\Rightarrow$$

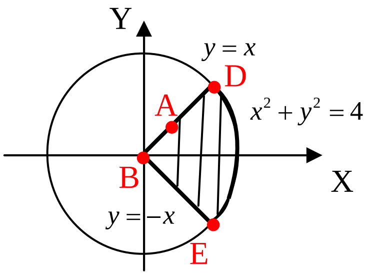
$$\Rightarrow\quad \vec{u}=\left(x'(0),y'(0)\right)=\left(-\frac{1}{11},\frac{3}{11}\right)$$

Eta $|\vec{u}|=\frac{\sqrt{10}}{11} \quad\Rightarrow\quad \vec{u}=\left(-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ unitarioa da.

Beraz, $\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(1,3)}=f'_x(1,3)\cdot\frac{-1}{\sqrt{10}}+f'_y(1,3)\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{2-18}{e^{10}\cdot\sqrt{10}}=-\frac{16}{e^{10}\cdot\sqrt{10}}$

4.- Aurkitu $f(x,y)=x^2+y^2-x-y-1$ **funtzioaren mutur absolutuak** $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\; x^2+y^2\le 4,\; x\ge |y|\right\}$ **multzoan.**

(2 puntu)



f funtzio jarraitua da M multzo itxi eta mugatuan, orduan Weiestrass-en teoremak ziurtatzen digu multzo horretan f-ren maximo eta minimo absolutuak existitzen direla.

a) f-ren puntu kritiko ez-baldintzatuak kalkulatzen hasiko gara:

$$\left.\begin{cases} f'_x=2x-1=0 \iff x=\dfrac{1}{2} \\ f'_y=2y-1=0 \iff y=\dfrac{1}{2}\end{cases}\right\rangle \Rightarrow A=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\in M \text{ puntu kritikoa da.}$$

b) f-ren puntu kritiko baldintzatuak (M multzoaren mugan daudenak) kalkulatuko ditugu. M-ren mugan hiru zati ditugunez, bakoitza baldintza baten bitartez adierazita dagoena, lau kasu bereiziko ditugu:

b.1) $y=x \Rightarrow F(x)=2x^2-2x-1 \Rightarrow F'(x)=4x-2=0 \iff x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow A$

b.2) $y=-x \Rightarrow F(x)=2x^2-1 \Rightarrow F'(x)=4x=0 \iff x=0 \Rightarrow B=(0,0)$

b.3) $x^2+y^2=4 \Rightarrow w(x,y)=x^2+y^2-x-y-1+\lambda(x^2+y^2-4)$ funtzioa dugu Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiltzeko. Honela:

$$\left.\begin{cases} \left.\begin{array}{l} w'_x=2x-1+2\lambda x=0 \iff 2x(1+\lambda)-1=0 \\ w'_y=2y-1+2\lambda y=0 \iff 2y(1+\lambda)-1=0 \end{array}\right\rangle \overset{(*)}{\Rightarrow} 1+\lambda=\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{2y} \iff x=y \\ x^2+y^2=4 \end{cases}\right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2=4 \overset{x\ge 0}{\Rightarrow} x=\sqrt{2} \Rightarrow y=\sqrt{2} \Rightarrow D=\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) \text{ puntu kritikoa dugu.}$$

b.4) Mugaren zati bien arteko ebaki-puntuak ere kontuan hartu behar dira (hau da, baldintza biak batera egiaztatzen dituztenak. Mugako erpinak):

$y=x \wedge y=-x \Rightarrow B$

$x^2+y^2=4 \wedge y=x \Rightarrow D$

$x^2+y^2=4 \wedge y=-x \Rightarrow E=\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$

Puntu hauetan guztietan f-ren balioak konparatuz:

$$f(A)=-\frac{3}{2} \quad f(B)=-1 \quad f(D)=3-2\sqrt{2} \quad f(E)=3$$

Beraz, A minimo eta E maximo absolutuak dira.

(*) Baldin $x=0 \Rightarrow -1=0$

Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	2. Zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

5.- Izan bedi $F(x,y)=2x+y+\int_x^{x+y^2} f(x\cdot t^2)dt$ **diferentziagarria. Kalkulatu *F*-ren lehenengo diferentziala (0,0) puntuan.**

(1.5 puntu)

$$dF(0,0)=F'_x(0,0)\cdot dx+F'_y(0,0)\cdot dy$$

$$F'_x(x,y)=2+\int_x^{x+y^2} t^2\cdot f'(x\cdot t^2)dt+f\left(x\cdot(x+y^2)^2\right)-f\left(x^3\right) \quad\Rightarrow\quad F'_x(0,0)=2$$

$$F'_y(x,y)=1+2y\cdot f\left(x\cdot(x+y^2)^2\right) \quad\Rightarrow\quad F'_y(0,0)=1$$

$$\Rightarrow\quad dF(0,0)=2\cdot dx+dy$$

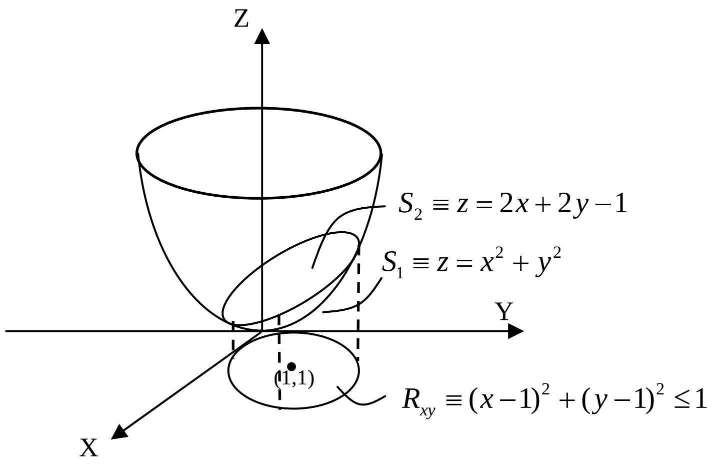
6.- Izan bitez $S_1 \equiv z = x^2 + y^2$ eta $S_2 \equiv z = 2x + 2y - 1$ gainazalak.

a) Kalkulatu azpitik S_1 eta goitik S_2 gainazalek mugaturiko solidoaren bolumena.

b) Kalkulatu solido horretako S_2 gainazalaren zatiaren azalera.

(2 puntu)

a) $S_1 \cap S_2 \equiv \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2x + 2y - 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x + 2y - 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$



Zilindrikoetan:

$$\begin{cases} x = 1 + \rho\cos\theta \\ y = 1 + \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S_1 \equiv z = 2 + 2\rho(\cos\theta + \sin\theta) + \rho^2 \\ S_2 \equiv z = 3 + 2\rho(\cos\theta + \sin\theta) \\ R_{xy} \equiv \rho \leq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$V \equiv \left\{ 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 2 + 2\rho(\cos\theta + \sin\theta) + \rho^2 \leq z \leq 3 + 2\rho(\cos\theta + \sin\theta) \right\}$$

$$\text{Bolumena}(V) = \iiint_V dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\left[3 + 2\rho(\cos\theta + \sin\theta) - 2 - 2\rho(\cos\theta + \sin\theta) - \rho^2\right] d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\left(1 - \rho^2\right) d\rho d\theta = 2\pi\int_0^1 \left(\rho - \rho^3\right) d\rho = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

b) $\text{Azalera}(S_2) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy$

non $S_2 \equiv z = 2x + 2y - 1 \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad z'_x = 2$ eta $z'_y = 2$

Beraz:

$$\text{Azalera}(S_2) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + 4 + 4}\, dxdy = 3\iint_{R_{xy}} dxdy = 3 \cdot Azalera\left(R_{xy}\right) = 3\pi$$

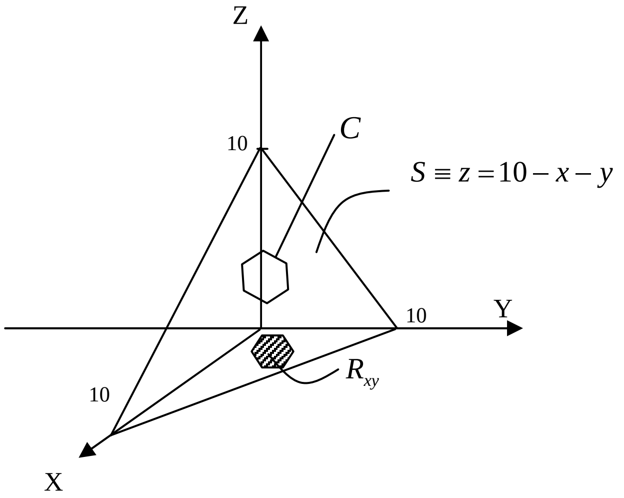
7.- $\vec{F} = x \cdot \vec{i} + (2x+y) \cdot \vec{j} + (3x+z) \cdot \vec{k}$ **eremu bektoriala emanik,**

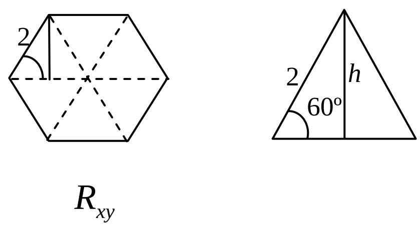
a) **Kalkulatu** $\vec{F}$ **-ren zirkulazioa** $x+y+z=10$ **planoan kokaturiko** C **kurba itxi eta zatika leunean zehar, bere proiekzio ortogonala** $z=0$ **planoan 2 unitateko aldea duen hexagono erregularra delarik.**

b) **Kalkulatu esferikoetan adierazitako** $V \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 1 \le \rho \le 2 \end{cases}$ **eremu itxian zehar irteten den** $\vec{F}$ **-ren fluxua.**

(3 puntu)

a) C kurba itxi eta zatika leuna $x+y+z=10$ gainazalean kokatuta, beraz Stokes erabil daiteke:





$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} \cdot d\vec{S} = \iint_S \left[(0-0)dydz + (0-3)dzdx + (2-0)dxdy\right] \underset{\vec{N}=(1,1,1)}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \pm \iint_{R_{xy}} (-3+2)dxdy \overset{\left(\gamma<\frac{\pi}{2}\right)}{=} -\iint_{R_{xy}} dxdy = -Azalera\left(R_{xy}\right) \overset{(*)}{=} -6\sqrt{3}$$

(*) Non R_{xy} 2 aldeko hexagono erregularrak mugaturiko eskualdea den. Beraz:

$$h = 2 \cdot \sin 60º = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad Azalera\left(R_{xy}\right) = 6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

b) $V \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 1 \le \rho \le 2 \end{cases}$ eremua itxia denez, Gauss erabil daiteke:

$$\Phi_V\left(\vec{F}\right) = \iiint_V div\left(\vec{F}\right) dxdydz = 3\iiint_V dxdydz = 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{2} \rho^2 \cdot \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= 6\pi \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \cdot \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_1^2 = 6\pi \cdot \frac{7}{3}\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} = 14\pi(1+1) = 28\pi$$