Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	1. Zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

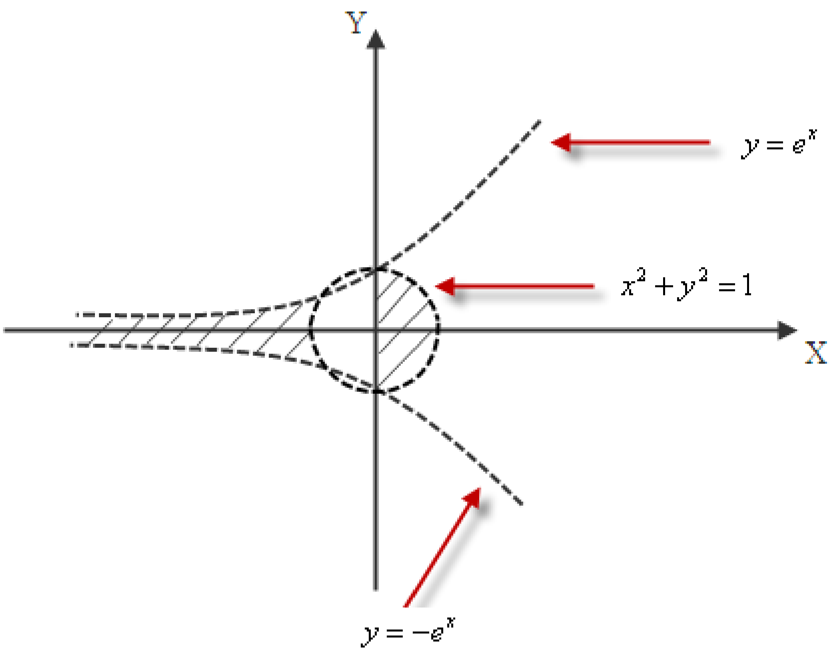
$$f(x,y)=\frac{\mathrm{L}\left[x\cdot(1-y^2-x^2)\right]}{\sqrt{e^x-|y|}}$$

(2 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\,/\,x\cdot(1-y^2-x^2)>0,\ e^x-|y|>0\right\}$$

$$x\cdot(1-y^2-x^2)>0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x>0 & \wedge \quad x^2+y^2<1 \\ x<0 & \wedge \quad x^2+y^2>1 \end{cases}$$

$$e^x-|y|>0 \quad\Leftrightarrow\quad |y|<e^x \quad\Leftrightarrow\quad -e^x<y<e^x$$



2.- $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin\left(x^n\cdot y\right)}{\mathrm{L}\left(x^2+y^2+1\right)} & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ **funtzioa emanik:**

a) **Estudiatu bere jarraitutasuna (0,0) puntuan** $\forall n\in\mathbb{N}$**.**

b) **Kalkulatu** $f'_x(0,0)$ **eta** $f'_y(0,0)$**,** $\forall n\in\mathbb{N}$**.**

c) **Estudiatu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan** $\forall n\in\mathbb{N}$**.**

d) **Aztertu bere deribagarritasuna (0,0) puntuan** $n=2$ **eta** $n=3$ **kasuetarako.**

(2 puntu)

a) f jarraitua (0,0) puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(x^n\cdot y\right)}{\mathrm{L}\left(x^2+y^2+1\right)}=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\frac{\sin\left(\rho^{n+1}\cdot\cos^n\theta\cdot\sin\theta\right)}{\mathrm{L}\left(\rho^2+1\right)}\sim$$

$$\sim\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\frac{\rho^{n+1}\cdot\cos^n\theta\cdot\sin\theta}{\rho^2}=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\rho^{n-1}\cdot\cos^n\theta\cdot\sin\theta=\begin{cases}\varphi(\theta) & \text{baldin } n=1\\ 0 & \forall n\geq 2\end{cases}$$

Beraz, f jarraitua da (0,0) puntuan $\forall n\geq 2$.

b) $$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{0}{\mathrm{L}\left(h^2+1\right)}-0}{h}=0\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\mathrm{im}_{k\to0}\frac{\dfrac{0}{\mathrm{L}\left(k^2+1\right)}-0}{k}=0\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

c) Baldin $n=1$, f ez da jarraitua (0,0) puntuan $\Rightarrow f$ ez da diferentziagarria (0,0) puntuan.

$\forall n\geq 2$ baldintza beharrezkoa eta nahikoa aplikatuko dugu:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-f'_x(0,0)\cdot h-f'_y(0,0)\cdot k\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\dfrac{\sin\left(h^n\cdot k\right)}{\mathrm{L}\left(h^2+k^2+1\right)}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\sin\left(h^n\cdot k\right)\right|}{\mathrm{L}\left(h^2+k^2+1\right)\cdot\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\frac{\left|\sin\left(\rho^{n+1}\cdot\cos^n\theta\cdot\sin\theta\right)\right|}{\mathrm{L}\left(\rho^2+1\right)\cdot\rho}$$

$$\sim\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\frac{\rho^{n+1}\cdot\left|\cos^n\theta\cdot\sin\theta\right|}{\rho^3}=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\rho^{n-2}\cdot\left|\cos^n\theta\cdot\sin\theta\right|=\begin{cases}\varphi(\theta) & \text{baldin } n=2\\ 0 & \forall n\geq 3\end{cases}$$

Beraz, f diferentziagarria da (0,0) puntuan $\forall n\geq 3$.

d) $\forall n \geq 3$ f diferentziagarria da (0,0) puntuan $\Rightarrow$ f deribagarria da (0,0) puntuan.

$n = 2$ kasuan definizioa erabili beharko dugu. Honela:

f deribagarria da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow \exists \left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)} \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u} = \left(h_1, h_2\right)$ unitarioa.

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda h_1, \lambda h_2) - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\dfrac{\sin\left(\lambda^{n+1} \cdot h_1^n \cdot h_2\right)}{\mathrm{L}\left(\lambda^2 + 1\right)}}{\lambda} \sim \lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda^{n+1} \cdot h_1^n \cdot h_2}{\lambda^3} =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \lambda^{n-2} \cdot h_1^n \cdot h_2 \overset{(n=2)}{=} h_1^2 \cdot h_2 \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow f \text{ deribagarria da (0,0) puntuan.}$$

3.- Izan bedi $\begin{cases} F(x,y,t) = x^2 - xy + t + a = 0 \\ G(x,y,t) = \mathrm{L}(1+t) + xy + b = 0 \end{cases}$ **ekuazio-sistema.**

a) Aurkitu $a, b \in \mathbb{R}$ **parametroen balioak aurreko sistemak** $x = x(t)$ **eta** $y = y(t)$ **funtzio diferentziagarriak defini ditzan** $P(x,y,t) = (-1,2,0)$ **puntuaren ingurune batean.**

b) Izan bedi aurreko atalean lortutako funtzioek definituriko $C \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ **kurba. Baldin planoko** (x,y) **puntu bakoitzean tenperatura** $T(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ **funtzioak adierazten badu, aurkitu tenperaturaren aldakuntza,** $(-1,2)$ **puntutik mugitzen bagara** ***C*** **kurbak adierazitako norabidean.**

(2 puntu)

a) Ikus dezagun ea $\begin{cases} F(x,y,t) = x^2 - xy + t + a = 0 \\ G(x,y,t) = \mathrm{L}(1+t) + xy + b = 0 \end{cases}$ ekuazio-sistemak funtzio inplizituaren teorema egiaztatzen duen $P(x,y,t) = (-1,2,0)$ puntuaren ingurune batean:

i. $\begin{cases} F(P) = 1 + 2 + 0 + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -3 \\ G(P) = \mathrm{L}1 - 2 + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 2 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} F'_x = 2x - y \quad F'_y = -x \quad F'_t = 1 \\ G'_x = y \quad G'_y = x \quad G'_t = \dfrac{1}{1+t} \end{cases}$ jarraituak dira *P* puntuaren ingurune batean.

iii. $\left| \dfrac{D(F,G)}{D(x,y)} \right|_P = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} 2x - y & -x \\ y & x \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

Beraz, $a = -3$ eta $b = 2$ direnean, $P(x,y,t) = (-1,2,0)$ puntuaren ingurune batean $\exists! \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ diferentziagarriak non $\begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

b) Tenperaturaren aldakuntza $(-1,2)$ puntutik abiatuz $\left. \dfrac{dT}{d\vec{u}} \right|_{(-1,2)}$ deribatu direkzionalak emango digu, non $\vec{u} = \left(x'(0), y'(0) \right)$ (unitarioa) $C \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ kurbak adierazitako norabidea den.

Hasierako sisteman *t*-rekiko deribatuz eta *P* puntuan ordezkatuz:

$$\begin{cases} (2x-y)\cdot x' - x\cdot y' + 1 = 0 \\ y\cdot x' + x\cdot y' + \dfrac{1}{1+t} = 0 \end{cases} \xRightarrow{P \text{ puntuan}} \begin{cases} -4x'(0) + y'(0) + 1 = 0 \\ 2x'(0) - y'(0) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x'(0), y'(0)\right) = (1,3) \xRightarrow{\text{unitarioa}} \vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \xRightarrow{T \text{ diferentziagarria}}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dT}{d\vec{u}}\right|_{(-1,2)} = T'_x(-1,2)\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} + T'_y(-1,2)\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\begin{cases} T'_x = \dfrac{-2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} \Rightarrow T'_x(-1,2) = \dfrac{2}{25} \\ T'_y = \dfrac{-2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} \Rightarrow T'_y(-1,2) = \dfrac{-4}{25} \end{cases} \Rightarrow \left.\frac{dT}{d\vec{u}}\right|_{(-1,2)} = \frac{2}{25}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{4}{25}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{25}$$

4.- Aurkitu $f(x,y)=\left(1+e^{y}\right)\cdot\cos x-y\cdot e^{y}$ **funtzioaren mutur erlatiboak.**

(2 puntu)

Baldintza beharrezkoa aplikatuko dugu puntu kritikoak kalkulatzeko:

$$\left.\begin{cases} f'_x=-\left(1+e^{y}\right)\cdot\sin x=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=k\pi \quad \forall k\in\mathbb{Z} \\ f'_y=e^{y}\cdot\cos x-e^{y}-y\cdot e^{y}=e^{y}\cdot(\cos x-1-y)=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=\cos x-1 \end{cases}\right. \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{Baldin } x=2k\pi \quad \forall k\in\mathbb{Z} \quad\Rightarrow\quad y=\cos(2k\pi)-1=1-1=0 \\ \text{Baldin } x=(2k+1)\pi \quad \forall k\in\mathbb{Z} \quad\Rightarrow\quad y=\cos((2k+1)\pi)-1=-1-1=-2 \end{cases}$$

Beraz, lortutako infinitu puntu kritikoak hauek dira:

$$\begin{cases} P(2k\pi,0) \quad \forall k\in\mathbb{Z} \\ Q((2k+1)\pi,-2) \quad \forall k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Puntu kritikoetan baldintza nahikoa aztertuko dugu orain.

$$\begin{cases} f''_{x^2}=-\left(1+e^{y}\right)\cdot\cos x \\ f''_{y^2}=e^{y}\cdot(\cos x-1-y)-e^{y}=e^{y}\cdot(\cos x-2-y) \\ f''_{xy}=-e^{y}\cdot\sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{x^2}(P)=-2 \quad f''_{x^2}(Q)=1+\dfrac{1}{e^2} \\ f''_{y^2}(P)=-1 \quad f''_{y^2}(Q)=-\dfrac{1}{e^2} \\ f''_{xy}(P)=0 \quad f''_{xy}(Q)=0 \end{cases}$$

Orduan:

$$\left.\begin{cases} d^2f(P)=-2(dx)^2-(dy)^2<0 \quad\Leftrightarrow\quad P \text{ maximo erlatiboa} \\ d^2f(Q)=\left(1+\dfrac{1}{e^2}\right)(dx)^2-\dfrac{1}{e^2}(dy)^2 \gtrless 0 \quad\Leftrightarrow\quad Q \text{ zeladura-puntua} \end{cases}\right. \quad \forall k\in\mathbb{Z}$$

Edo Sylvester-en irizpidea erabiliz:

$$Hf(P)=\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \Delta_1=-2<0 \\ \Delta_2=2>0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad d^2f(P)<0$$

$$Hf(Q)=\begin{vmatrix} 1+\dfrac{1}{e^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{e^2} \end{vmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \Delta_1=1+\dfrac{1}{e^2}>0 \\ \Delta_2=-\dfrac{1}{e^2}\cdot\left(1+\dfrac{1}{e^2}\right)<0 \quad\Rightarrow\quad d^2f(P)\gtrless 0 \end{cases}$$

Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	2. Zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

5.- $f(x,y) = y \cdot g\left(e^{x^2}\right)$ **funtzio diferentziagarriak 2*e* balioa hartzen duela (1,1) puntuan jakinda, kalkulatu** $E \equiv y \cdot \left(f'_x + f'_y \right) - y^2 \cdot f''_{xy}$ **adierazpenaren balioa puntu horretan.**

(1.5 puntu)

$$f(x,y) = y \cdot g\left(e^{x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'_x = 2xy \cdot e^{x^2} \cdot g'\left(e^{x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad f''_{xy}(1,1) = 2x \cdot e^{x^2} \cdot g'\left(e^{x^2}\right) \\ f'_y = g\left(e^{x^2}\right) \end{cases}$$

$$f(1,1) = g(e) = 2e \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'_x(1,1) = 2e \cdot g'(e) \\ f'_y(1,1) = g(e) = 2e \\ f''_{xy}(1,1) = 2e \cdot g'(e) \end{cases}$$

Beraz, (1,1) puntuan:

$$E \equiv \left(f'_x(1,1) + f'_y(1,1) \right) - f''_{xy}(1,1) = 2e \cdot g'(e) + 2e - 2e \cdot g'(e) = 2e$$

6.- Izan bitez $V \equiv \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ x^2 + y^2 \le 4 \\ z \le x^2 + y^2 \end{cases}$ **solidoa eta bere muga osatzen duen *S* gainazal itxia.**

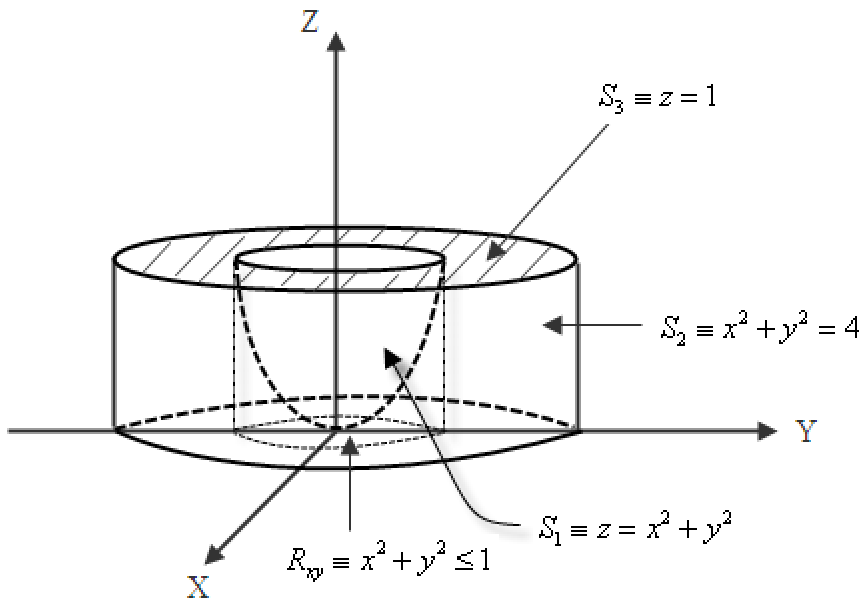
a) Kalkulatu *S* gainazaleko $z = x^2 + y^2$ **gainazalaren zatiaren azalera.**

b) $\vec{F}(x,y,z) = 3x \cdot \vec{i} + 2(x+y) \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ **bektorea emanik, kalkulatu *S* gainazal itxian zehar irteten den** $\vec{F}$ **-ren fluxua.**

c) Izan bedi $z = x^2 + y^2$ **gainazalean kokaturiko *C* kurba itxi eta zatika leuna, gainazal horretako** $\frac{\pi}{12}$ **azalerako eskualdea mugatzen duena. Kalkulatu** $\vec{F}$ **-ren zirkulazioa *C* kurban zehar.**

(3 puntu)

a)



$$S_1 \equiv z = x^2 + y^2 \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv x^2 + y^2 \le 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Azalera(S_1) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy$$

Polarretan: $\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad R_{xy} \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 1 \end{cases} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad Azalera(S_1) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2}\, d\rho\, d\theta = 2\pi \cdot \left. \frac{(1 + 4\rho^2)^{3/2}}{3/2} \cdot \frac{1}{8} \right|_0^1 = \frac{\pi}{6} \cdot \left(5^{3/2} - 1\right)$$

b) *S* gainazal itxia denez, Gauss-en teorema (1) erabil daiteke, beraz:

$$\Phi_S\left(\vec{F}\right)=\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_S \left(3x\,dydz+2(x+y)\,dzdx+z\,dxdy\right)\overset{(1)}{=}\iiint_V div\left(\vec{F}\right)dxdydz=6\iiint_V dxdydz=$$

Zilindrikoetan: $\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\theta \\ y=\rho\cdot\sin\theta \quad \left|J\right|=\rho \quad \Rightarrow \quad V\equiv \\ z=z \end{cases}\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le z\le 1 \\ \sqrt{z}\le\rho\le 2 \end{cases}$

$$=6\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\sqrt{z}}^2 \rho\, d\rho\, dz\, d\theta=6\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^1(4-z)dz=6\pi\left(4-\frac{1}{2}\right)=21\pi$$

c) C kurba itxi eta zatika leuna denez, Stokes-en teorema (2) erabil daiteke, beraz:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_C\left(3x\,dx+2(x+y)\,dy+z\,dz\right)\overset{(2)}{=}\iint_{S_1^*}\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot d\vec{S}\overset{(Definizioz)}{=}\iint_{S_1^*}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot\vec{n}\right)\cdot dS$$

non $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)=0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{k}$

eta $S_1^*\equiv S_1$ gainazalaren zatia $\quad\Rightarrow\quad \vec{N}=(-2x,-2y,1)$ eta $\vec{n}=\dfrac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}$

Orduan:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_{S_1^*}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot\vec{n}\right)\cdot dS=\iint_{S_1^*}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot\frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}\right)\cdot dS=2\iint_{S_1^*}\frac{1}{\left|\vec{N}\right|}dS=2\iint_{R_{xy}^*}dxdy=2\cdot Azalera\left(R_{xy}^*\right)$$

non R_{xy}^* planoko eskualdea, S_1^* gainazalaren proiekzioa den.

Emandako datua S_1^* gainazalaren azalera da: $Azalera\left(S_1^*\right)=\iint_{S_1^*}dS=\iint_{R_{xy}^*}\left|\vec{N}\right|dxdy=\dfrac{\pi}{12}$

Ez, ordea, R_{xy}^* eskualdearen azalera: $Azalera\left(R_{xy}^*\right)=\iint_{R_{xy}^*}dxdy$. Eta integral hau ezin da kalkulatu. Beraz $\vec{F}$ -ren zirkulazioa, goian adierazi dugun moduan, eskualde horren azaleraren mende utzi behar da.

7.- Izan bedi $U(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ funtzioa.

a) Kalkulatu $a, b, c \in \mathbb{R}$, *U* funtzio eskalarra $\vec{F}(x,y) = (x+y)\cdot\vec{i} + (x-y)\cdot\vec{j}$ eremu bektorialaren funtzio potentziala izan dadin.

b) Kalkulatu $\vec{F}$ -ren lerro-integrala $C \equiv y = \left(x^5 - 1\right)\cdot \mathrm{L}(x+1)\cdot e^{\sqrt{1-x}} + x$ kurban zehar, (0,0) puntutik (1,1) puntura.

(1.5 puntu)

a) *U* funtzio eskalarra $\vec{F}$ -ren funtzio potentziala da $\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\nabla U} = \vec{F} \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} U'_x = 2ax + by = x + y \\ U'_y = bx + 2cy = x - y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2a = 1 \quad b = 1 \quad 2c = -1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2} \quad b = 1 \quad c = -\frac{1}{2}$$

b) $\overrightarrow{\nabla U} = \vec{F} \quad \Leftrightarrow \quad \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ bidearekiko independentea. Lerro-integrala, beraz, hiru eratan kalkula daiteke.

- Emandako *C* kurban zehar integratuz. Aukerarik zailena.
- Funtzio potentziala erabiliz:

$$\int\limits_{\substack{C \\ (0,0)\to(1,1)}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{\substack{C \\ (0,0)\to(1,1)}} \overrightarrow{\nabla U}\cdot d\vec{r} = U(1,1) - U(0,0) = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 1$$

- (0,0) puntutik (1,1) puntura doan bide errazenetik integratuz. Kasu honetan bide hori $C' \equiv y = x$ zuzena da. Orduan:

$$\int\limits_{\substack{C \\ (0,0)\to(1,1)}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{\substack{C' \\ (0,0)\to(1,1)}} \left((x+y)dx + (x-y)dy\right) = \int_0^1 2x\,dx = 1$$