Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Guztira 1. zatia

Azterketak 7 ariketa ditu 2 zatitan banatuta. Guztira 20 puntu dira eta azterketa gainditzeko 10 puntu atera behar dira.

Azterketaren iraupena: 3 ordu.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y) = \frac{\mathrm{L}(4-4x^2-y^2)+\sqrt{1-xy}}{\sqrt{-xy}}$$

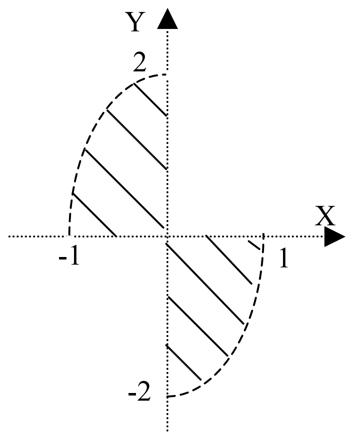
(2 puntu)

$D\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 4-4x^2-y^2>0, 1-xy\geq 0, -xy>0\right\}$

$4-4x^2-y^2>0 \Leftrightarrow x^2+\dfrac{y^2}{4}<1$ (elipseak mugaturiko eskualdea. Elipse bera ez dago definizio-eremuan)

$1-xy\geq 0 \Leftrightarrow xy\leq 1$ (hiperbolak eta euren bi adarren arteko eskualdea)

$$-xy>0 \Leftrightarrow xy<0 \Rightarrow \begin{cases} x>0 \text{ eta } y<0 \text{ (4. koadrantea)} \\ y>0 \text{ eta } x<0 \text{ (2. koadrantea)} \end{cases}$$



2.- Izan bedi $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{Baldin } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{Baldin } (x,y)=(0,0) \end{cases}$, $n\in\mathbb{N}$, funtzioa.

a) Estudiatu f–ren jarraitasuna $(0,0)$ puntuan.

b) Kalkulatu $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$.

c) Estudiatu f–ren diferentziagarritasuna $(0,0)$ puntuan.

(3 puntu)

a) f jarraitua da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)\in\mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^n\cdot\cos^n\theta}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\rho^{n-1}\cdot\cos^n\theta=\begin{cases}\cos\theta, & \text{baldin } n=1\Rightarrow\nexists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\\ 0=f(0,0), & \forall n\geq 2\end{cases}$$

Beraz f jarraitua da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow n\geq 2$

$$\text{b) } f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^n}{\sqrt{h^2}}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^n}{h|h|}=\begin{cases}\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{h^n}{h^2}=\begin{cases}\infty, n=1 \text{ bada}\\ 1, n=2 \text{ bada}\\ 0, \forall n\geq3\end{cases}\\ \lim\limits_{h\to0^-}-\dfrac{h^n}{h^2}=\begin{cases}-\infty, n=1 \text{ bada}\\ -1, n=2 \text{ bada}\\ 0, \forall n\geq3\end{cases}\end{cases}$$

Hau da, baldin $n=1,2\Rightarrow\nexists f'_x(0,0)$ eta $\forall n\geq3\Rightarrow f'_x(0,0)=0$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\frac{0}{\sqrt{k^2}}}{k}=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

c) Baldin $n=1$, f ez da jarraitua (0,0) puntuan (eta $\nexists f'_x(0,0)$), beraz ezin da diferentziagarria izan.

Baldin $n=2$, $\nexists f'_x(0,0)$, beraz ezin da diferentziagarria izan.

$\forall n\geq3$ diferentziagarria izateko B.B.N. aplikatuko diogu:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\frac{h^n}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^n}{h^2+k^2}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^n\cdot\cos^n\theta}{\rho^2}\underset{n\geq3}{=}0 \quad \forall\theta\in[0,2\pi]$$

Orduan $\forall n\geq3$ f diferentziagarria da (0,0) puntuan.

3.- $w = z \cdot \varphi(e^z + e^t)$ funtzioa emanik, non $z = z(x \cdot y)$ eta $t = \sin x \cdot \cos y$, eta $z(0) = 1$ eta $\varphi'(e+1) = 1$ direla ezagutuz, egiaztatu funtzio horren gradientea $(x, y) = (0,0)$ puntuan (1,0) bektorea dela.

(2 puntu)

Honako hau da frogatu behar duguna:

$$\vec{\nabla} w(0,0) = w'_x(0,0) \cdot \vec{i} + w'_y(0,0) \cdot \vec{j} = \vec{i} \Leftrightarrow \begin{cases} w'_x(0,0) = 1 \\ w'_y(0,0) = 0 \end{cases}$$

$$w'_x = y \cdot z' \cdot \varphi + z \cdot \varphi' \cdot \left(e^z \cdot y \cdot z' + e^t \cdot \cos x \cdot \cos y\right) \Rightarrow w'_x(0,0) = z(0) \cdot \varphi'\left(e^{z(0)} + e^0\right) = \varphi'(e+1) = 1$$

$$w'_y = x \cdot z' \cdot \varphi + z \cdot \varphi' \cdot \left(e^z \cdot x \cdot z' - e^t \cdot \sin x \cdot \sin y\right) \Rightarrow w'_y(0,0) = 0$$

4.- Honako ekuazio-sistema hau emanik

$$\begin{cases} F(x,y,z,u,v) = x - u - v = 0 \\ G(x,y,z,u,v) = y - u^2 - v^2 = 0 \\ H(x,y,z,u,v) = z - u^3 - v^3 = 0 \end{cases}$$

aurkitu $p(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) \in \mathbb{R}^5$ puntua non hurrengoa egiaztatzen den:

i) P puntuaren ingurune batean sistema horrek 3 funtzio diferentziagarri inplizituki definitzen ditu, $z = z(x,y)$ $u = u(x,y)$ $v = v(x,y)$.

ii) z-ren deribatua (x_0, y_0) puntuan maximoa da (1,0) bektorearen norabidean eta bere balioa 3 da.

(3 puntu)

i) Funtzio inplizituaren teorema aplikatuuz:

$$\begin{cases} x_0 - u_0 - v_0 = 0 \\ y_0 - u_0^2 - v_0^2 = 0 \\ z_0 - u_0^3 - v_0^3 = 0 \end{cases}$$

F, G eta H funtzioen lehenengo deribatu partzialak existitzen eta jarraituak dira $\mathbb{R}^5$ osoan

$$\left.\frac{D(F,G,H)}{D(z,u,v)}\right|_P = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2u_0 & -2v_0 \\ 1 & -3u_0^2 & -3v_0^2 \end{vmatrix} = 2v_0 - 2u_0 \neq 0 \Leftrightarrow u_0 \neq v_0$$

ii) $\vec{\nabla} z(x_0, y_0) = 3\vec{i} \Rightarrow z'_x(x_0, y_0) = 3$ eta $z'_x(x_0, y_0) = 3$

Hasierako sisteman x-rekiko deribatuz eta P puntuan ordezkatuz:

$$\begin{cases} 1 - u'_x - v'_x = 0 \\ -2u_0 \cdot u'_x - 2v_0 \cdot v'_x = 0 \\ z'_x - 3u_0^2 \cdot u'_x - 3v_0^2 \cdot v'_x = 0 \end{cases} \Rightarrow z'_x(x_0, y_0) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2u_0 & -2v_0 \\ 0 & -3u_0^2 & -3v_0^2 \end{vmatrix}}{2v_0 - 2u_0} = -3u_0 \cdot v_0 = 3 \Leftrightarrow u_0 \cdot v_0 = -1$$

Era berean, y-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} -u'_y - v'_y = 0 \\ 1 - 2u_0 \cdot u'_y - 2v_0 \cdot v'_y = 0 \\ z'_y - 3u_0^2 \cdot u'_y - 3v_0^2 \cdot v'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow z'_y(x_0, y_0) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2u_0 & -2v_0 \\ 0 & -3u_0^2 & -3v_0^2 \end{vmatrix}}{2v_0 - 2u_0} = \frac{3}{2}(u_0 + v_0) = 0 \Leftrightarrow u_0 + v_0 = 0$$

Guztira, ebatzi behar dugun sistemak 5 ekuazio eta 5 ezezagun ditu:

$$\begin{cases} x_0 - u_0 - v_0 = 0 & \Rightarrow x_0 = 0 \\ y_0 - u_0^2 - v_0^2 = 0 & \Rightarrow y_0 = 2 \\ z_0 - u_0^3 - v_0^3 = 0 & \Rightarrow z_0 = 0 \\ u_0 \cdot v_0 = -1 \Rightarrow v_0 = \dfrac{-1}{u_0} & \Rightarrow v_0 = \mp 1 \\ u_0 + v_0 = 0 \quad \Rightarrow u_0 - \dfrac{1}{u_0} = 0 \Rightarrow u_0 = \pm 1 & \end{cases}$$

Beraz, bi puntu atera zaizkigu: (0,2,0,1,-1) eta (0,2,0,-1,1).

Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	Guztira 2. zatia

Azterketak 7 ariketa ditu 2 zatitan banatuta. Guztira 20 puntu dira eta azterketa gainditzeko 10 puntu atera behar dira.

Azterketaren iraupena: 3 ordu.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

5.- Aurkitu $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 1, x>0, y>0\right\}$ multzoan $f(x,y)=\mathrm{L}x+\mathrm{L}y$ funtzioaren mutur erlatiboak.

(3 puntu)

Baldintzarik gabeko mutur erlatiboak kalkulatzen hasiko gara:

$$\begin{cases} f'_x=\dfrac{1}{x}\neq 0 \\ f'_y=\dfrac{1}{y}\neq 0 \end{cases}$$

Sistema honek soluziorik ez dauka, hortaz ez da mutur erlatibo librerik existitzen.

Mutur erlatibo baldintzatuak egon daitezke: $x^2+y^2=1$ (M multzoaren muga) baldintza egiaztatzen dutenak hain zuzen ere. Kalkulatzeko Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliko dugu:

$$w(x,y)=\mathrm{L}x+\mathrm{L}y+\lambda(x^2+y^2-1)$$

$$\begin{cases} \begin{cases} w'_x=\dfrac{1}{x}+2\lambda x=0\Leftrightarrow 2\lambda x^2+1=0 \\ w'_y=\dfrac{1}{y}+2\lambda y=0\Leftrightarrow 2\lambda y^2+1=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda=-\dfrac{1}{2x^2}=-\dfrac{1}{2y^2}\Leftrightarrow x^2=y^2 \underset{x>0,y>0}{\Rightarrow} x=y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x^2=1\underset{x>0}{\Rightarrow} x=\frac{1}{\sqrt{2}}=y \quad \text{eta} \quad \lambda=-1$$

Puntu kritiko bakarra dugu: $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Puntu honi muturra izateko baldintza nahikoa aplikatuko zaio:

$$\left.\begin{array}{l} w''_{x^2} = -\dfrac{1}{x^2} + 2\lambda \Rightarrow w''_{x^2}(A) = -4 \\ w''_{xy} = 0 \\ w''_{y^2} = -\dfrac{1}{y^2} + 2\lambda \Rightarrow w''_{y^2}(A) = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow d^2w(A) = -4(dx)^2 - 4(dy)^2$$

Bestalde, $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow \varphi'_y = 2y \Rightarrow \varphi'_y(A) \neq 0 \Rightarrow \exists y = y(x)$

Orduan, ekuazio horretan diferentziala kalkulatuz: $2xdx + 2ydy = 0 \Rightarrow dy = dx$ (A puntuan). Eta aurreko adierazpenean ordezkatuz:

$d^2w(A) = -4(dx)^2 - 4(dy)^2 = -8(dx)^2 < 0 \Rightarrow$ A maximo erlatiboa da (*M* multzoan).

6.- Kalkulatu $\int\left(\frac{18x}{9x^2+4y^2}dx+\frac{8y}{9x^2+4y^2}dy\right)$ lerro-integrala koordenatu-jatorrian zentroa duen n aldeko poligono erregularretik, noranzko positiboan ibilitakoa.

(3 puntu)

$I=\oint_C (Pdx+Qdy)$ non $P=\frac{18x}{9x^2+4y^2}$ eta $Q=\frac{8y}{9x^2+4y^2}$

P eta Q eta euren 1. deribatu partzialak jarraituak dira $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ eta $P'_y=Q'_x \Rightarrow I=\oint_C (Pdx+Qdy)=k \quad \forall C$ itxi eta sinple, (0,0) puntua inguratzen duena.

Aurrekoa kontuan izanik, n aldeko poligono erregularraren gainetik integratu beharrean $C\equiv 9x^2+4y^2=1$ elipsea aukeratuko dugu. Kurba hori parametrizatuz:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{3}\cos t \\ y=\frac{1}{2}\sin t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$$

Integrala honako hau bihurtzen zaigu:

$$I=\int_0^{2\pi}\left[6\cos t\left(\frac{-\sin t}{3}\right)+4\sin t\left(\frac{\cos t}{2}\right)\right]dt=\int_0^{2\pi}\left[-2\sin t\cos t+2\sin t\cos t\right]dt=0$$

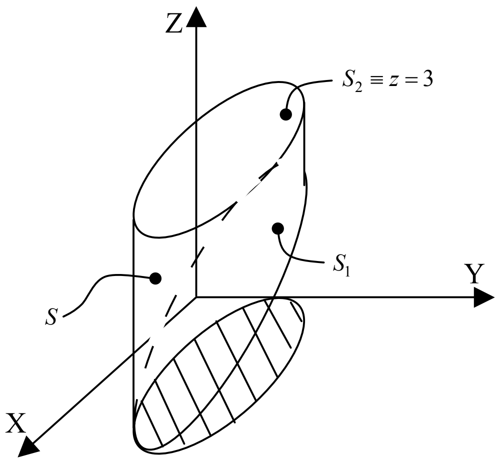
7.- Izan bedi $\vec{F}=(x^2, xz-xy, xy-xz)$ eremu bektoriala.

a) Kalkulatu $\vec{F}$-ren zirkulazioak $C_1 \equiv S\cap S_1$ eta $C_2 \equiv S\cap S_2$ kurben zehar, non $S\equiv 4x^2-8x+y^2-2y=-4$, $S_1\equiv x+z=2$ eta $S_2\equiv z=3$

b) Baldin S_1 eta S_2 planoek S gainazalean S_3 enbor zilindrikoa mugatzen badute, kalkulatu $\vec{F}$-ren errotazionalaren fluxua S_3 gainazalean zehar.

(4 puntu)

a) $S\equiv 4x^2-8x+y^2-2y=-4 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2}{1/4}+(y-1)^2=1$ (zilindro eliptikoa da)



$C_1\equiv S\cap S_1$ eta $C_2\equiv S\cap S_2$ kurba itxiak dira eta $\vec{F}$ jarraitua eta diferentziagarria, beraz $\vec{F}$-ren zirkulazioak kalkulatzeko Stokes-en teorema erabil daiteke:

$$\oint_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_{S_1} \overrightarrow{rot}(\vec{F})d\vec{S} \quad \text{eta} \quad \oint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_{S_2} \overrightarrow{rot}(\vec{F})d\vec{S}$$

non $\overrightarrow{rot}(\vec{F})=(x-x)\vec{i}+(0-(y-z))\vec{j}+(z-y-0)\vec{k}=0\vec{i}+(z-y)\vec{j}+(z-y)\vec{k}$.

Beraz,

$$\oint_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_{S_1}\left[0dydz+(z-y)dzdx+(z-y)dxdy\right] \overset{(1)}{=} \pm\iint_{R_{xy}}(z-y)dxdy=\iint_{R_{xy}}(2-x-y)dxdy \overset{(2)}{=}$$

(1) $S_1\equiv z=2-x \Rightarrow z'_x=-1,\quad z'_y=0 \Rightarrow \vec{N}=(1,0,1)$

(2) $R_{xy}\equiv \dfrac{(x-1)^2}{1/4}+(y-1)^2\le 1$.

Polarretan: $\begin{cases} x=1+\dfrac{1}{2}\rho\cos\theta \\ y=1+\rho\sin\theta \end{cases}$ $\quad J=\dfrac{1}{2}\rho \quad 0\le\theta\le 2\pi \quad 0\le\rho\le 1$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{2}\rho\left(2-1-\frac{1}{2}\rho\cos\theta-1-\rho\sin\theta\right)d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{2}\rho\left(-\frac{1}{2}\rho\cos\theta-\rho\sin\theta\right)d\rho d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos\theta-\sin\theta\right)d\theta=\frac{1}{6}\left[-\frac{\sin\theta}{2}+\cos\theta\right]_0^{2\pi}=0$$

Eta, era berean,

$$\oint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} \left[0dydz + (z-y)dzdx + (z-y)dxdy\right] \overset{(3)}{=} \pm \iint_{R_{xy}} (3-y)dxdy \overset{(2)}{=}$$

(3) $S_2 \equiv z = 3 \Rightarrow dz = 0$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{2}\rho\left(3-1-\rho\sin\theta\right)d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{2}\rho\left(2-\rho\sin\theta\right)d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sin\theta}{6}\right)d\theta =$$

$$= \left[\frac{\theta}{2}+\frac{\cos\theta}{6}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

b) $\Phi_{S_3}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{F})\right) = \iint_{S_3} \overrightarrow{rot}(\vec{F})d\vec{S}$ gainazal-integrala kalkulatu beharko genuke. Hala ere, $S_4 \equiv S_1 \cup S_2 \cup S_3$ gainazal itxia definitzen badugu, orduan:

$$\Phi_{S_4} = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} + \Phi_{S_3} \underset{Gauss}{=} \iiint_V div\left[\overrightarrow{rot}(\vec{F})\right]dxdydz = 0 \Rightarrow \Phi_{S_3} = -\Phi_{S_1} - \Phi_{S_2} \underset{a)}{=} -0-\pi = -\pi$$