Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	1. Zatia

Azterketak 7 ariketa ditu bi zatitan bananduta. Guztira 14 puntu dira eta azterketa gainditzeko 7 puntu atera behar dira.

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\frac{1}{\mathrm{L}\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)}+\sqrt{1-x^2-y^2}$$

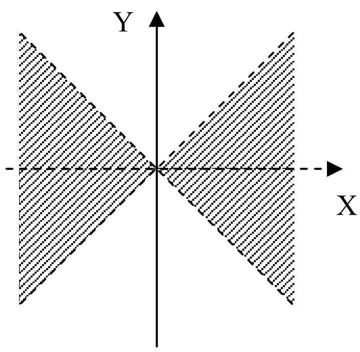
(2 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \mathrm{L}\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)\neq 0, \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}>0, x^2-y^2\neq 0, 1-x^2-y^2\geq 0\right\}$$

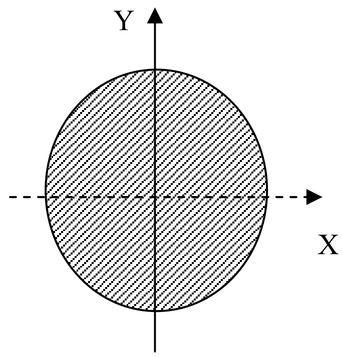
$$\mathrm{L}\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)\neq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\neq 1 \Leftrightarrow x^2+y^2\neq x^2-y^2 \Leftrightarrow y\neq 0$$

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}>0 \Rightarrow \begin{cases} (x,y)\neq(0,0) \\ x^2-y^2>0 \Leftrightarrow |x|>|y| \end{cases}$$

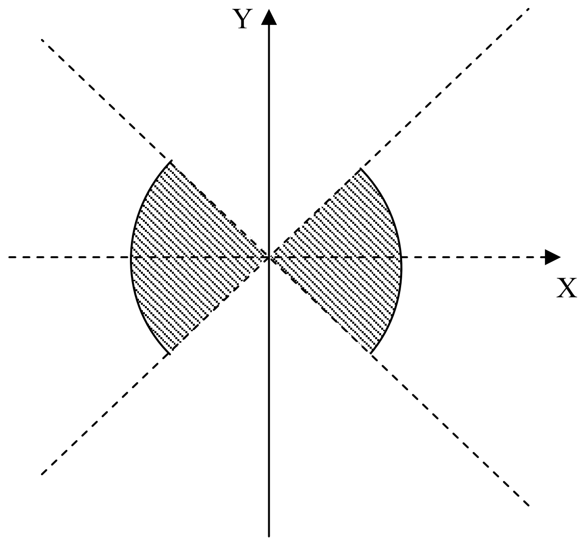
$$x^2-y^2\neq 0 \Leftrightarrow |x|\neq|y|$$



$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$



Eta zati guztien ebakidura honako eremu hau ematen digu:



2.- $f(x,y)=\begin{cases} 3^{\frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}} & \text{Baldin } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{Baldin } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ funtzioa emanik:

a) Aztertu *f* funtzioaren jarraitasuna (0,0) puntuan.
b) Kalkulatu *f* funtzioaren deribatu partzialak (0,0) puntuan.
c) Estudiatu *f* funtzioaren direntziagarritasuna (0,0) puntuan.

(2 puntu)

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} 3^{\frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0^+} 3^{\frac{\rho^3\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta}{\rho^2}}=\lim_{\rho\to 0^+} 3^{\rho\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta}=3^0=1=f(0,0)$$

Hortaz, *f* jarraitua da (0,0) puntuan.

b) $$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3^{\frac{0}{h^2}}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{h\to 0}\frac{3^{\frac{0}{k^2}}-1}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{1-1}{k}=0$$

c) Baldintza beharrezkoa eta nahikoa erabiliz:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_k(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|3^{\frac{h^2\cdot k}{h^2+k^2}}-1\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\left|3^{\rho\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta}-1\right|}{\rho}\sim\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\left|\mathrm{L}\left(3^{\rho\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta}\right)\right|}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\left|\rho\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta\cdot\mathrm{L}(3)\right|}{\rho}=\cos^2\theta\cdot\sin\theta\cdot\mathrm{L}(3)\neq 0$$

Beraz, *f* ez da diferentziagarria (0,0) puntuan.

3.- $\begin{cases} F(x,y,z,t) = x\cdot e^{z+t} + 2zt - 1 = 0 \\ G(x,y,z,t) = y\cdot e^{z-t} - \dfrac{z}{1+t} - 2x = 0 \end{cases}$ ekuazio-sistema emanik,

a) Frogatu aurreko sistemak $z = z(x,y)$ eta $t = t(x,y)$ funtzio diferentziagarriak definitzen dituela, non $z(1,2) = 0$ eta $t(1,2) = 0$.

b) (1,2) puntuan $x + y = 2$ zuzenaren norabidean, zein da handiagoa, balio absolututan, z funtzioaren aldakuntza edo t funtzioarena?

(2 puntu)

a) $P(x,y,z,t) = P(1,2,0,0)$ puntuan funtzio inplizituaren teorema egiaztatzen dela frogatu behar dugu:

i) $\begin{cases} F(P) = 1 + 0 - 1 = 0 \\ G(P) = 2 - 0 - 2 = 0 \end{cases}$

ii) F eta G funtzioen deribatu partzialak existitzen eta jarraituak dira P puntuaren ingurunean non $t \neq -1$:

$$F'_x = e^{z+t} \quad F'_y = 0 \qquad F'_z = x\cdot e^{z+t} + 2t \qquad F'_t = x\cdot e^{z+t} + 2z$$

$$G'_x = -2 \quad G'_y = e^{z-t} \quad G'_z = y\cdot e^{z-t} - \frac{1}{1+t} \quad G'_t = -y\cdot e^{z-t} + \frac{z}{(1+t)^2}$$

iii) $\left.\dfrac{D(F,G)}{D(z,t)}\right|_P = \begin{vmatrix} F'_z & F'_t \\ G'_z & G'_t \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

Beraz, $P(x,y,z,t) = P(1,2,0,0)$ puntuaren ingurunean $z = z(x,y)$ eta $t = t(x,y)$ funtzio diferentziagarriak existitzen dira non $z(1,2) = 0$ eta $t(1,2) = 0$.

b) $x + y = 2$ zuzenaren norabidea (-1,1) bektoreak adierazten digu, $\vec{u} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ bektore unitarioak hain zuzen ere. Norabide horretan z eta t funtzioen aldakuntzak kalkulatzeko euren deribatu direkzionalak lortu behar ditugu:

$$\left.\frac{dz}{d\vec{u}}\right|_P = z'_x(1,2)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + z'_y(1,2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{eta} \qquad \left.\frac{dt}{d\vec{u}}\right|_P = t'_x(1,2)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + t'_y(1,2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Hasierako sisteman x-rekiko deribatuz eta P puntuan ordezkatuz:

$$\begin{cases} 1 + z'_x(1,2) + t'_x(1,2) = 0 \\ -2 + z'_x(1,2) - 2t'_x(1,2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \ 3 + 3\cdot t'_x(1,2) = 0 \ \Leftrightarrow \ t'_x(1,2) = -1 \ \Rightarrow \ z'_x(1,2) = 0$$

Eta gauza bera y-rekiko errepikatuz:

$$\begin{cases} z'_y(1,2) + t'_y(1,2) = 0 \\ 1 + z'_y(1,2) - 2t'_y(1,2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \ -1 + 3\cdot t'_y(1,2) = 0 \ \Leftrightarrow \ t'_y(1,2) = \frac{1}{3} \ \Rightarrow \ z'_y(1,2) = -\frac{1}{3}$$

Orduan:

$$\left.\frac{dz}{d\vec{u}}\right|_P = -\frac{1}{3\sqrt{2}} \qquad \text{eta} \qquad \left.\frac{dt}{d\vec{u}}\right|_P = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

Beraz, balio absolututan, t funtzioaren aldakuntza z funtzioarena baino handiagoa da.

4.- Planoko (x,y) puntuaren tenperatura $T(x,y)=25+xy$ funtzioak ematen du. Barraskilo bat plano horretako $x^2+y^2=2$ kurbatik herrestan doa. Aurkitu puntuak non barraskiloak tenperatura maximoa eta minimoa jasango duen.

(2 puntu)

T funtzioaren mutur erlatibo baldintzatuak kalkulatu behar dira:

$$w(x,y)=25+xy+\lambda(x^2+y^2-2)$$

Baldintza beharrezkoa:

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} w'_x = y+2\lambda x=0 \\ w'_y = x+2\lambda y=0 \end{matrix}\right\} \underset{(x\neq 0,\, y\neq 0)}{\Rightarrow} \quad \lambda=-\dfrac{y}{2x}=-\dfrac{x}{2y}\Leftrightarrow x^2=y^2 \\ x^2+y^2-2=0 \end{cases} \Rightarrow 2x^2=2\Rightarrow x=\pm 1\Rightarrow y=\pm 1$$

Beraz, 4 puntu kritiko lortu ditugu: *A*(1,1), *B*(1,-1), *C*(-1,1) eta *D*(-1,-1).

Baldintza, $x^2+y^2=2$, berriz, multzo itxi eta mugatua denez (zirkunferentzia hain zuzen) eta *T* funtzio jarraitua denez multzo horretan, Weiertrass-en teoremak ziurtatzen digu mutur absolutuak existituko direla. Hortaz, baldintza nahikoa egiaztatu beharrean, puntu kritikoetan *T* funtzioak hartzen dituen balioak kalkulatu besterik ez dugu egin behar:

$$T(A)=T(D)=26 \qquad \text{eta} \qquad T(B)=T(C)=24$$

Beraz, *A* eta *D* maximoak dira eta *C* eta *D* minimoak.

Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	2. Zatia

Azterketak 7 ariketa ditu bi zatitan bananduta. Guztira 14 puntu dira eta azterketa gainditzeko 7 puntu atera behar dira.

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

5.- Kalkulatu $I(\lambda)=\int_0^\infty e^{-x}\cdot\frac{\sin(\lambda x)}{x}\,dx$ integral konbergentea.

(2 puntu)

Integral inpropio, konbergente eta parametrikoa da. Parametroarekiko deribatuz:

$$I'(\lambda)=\int_0^\infty e^{-x}\cdot\cos(\lambda x)\,dx$$

Integral hau ebazteko zatikako integrazioa aplikatuko dugu:

$$\begin{matrix} u=\cos(\lambda x) & du=-\lambda\cdot\sin(\lambda x)dx \\ dv=e^{-x}dx & v=-e^{-x} \end{matrix}$$. Orduan:

$$I'(\lambda)=\int_0^\infty e^{-x}\cdot\cos(\lambda x)\,dx=-e^{-x}\cdot\cos(\lambda x)\Big|_0^\infty-\lambda\int_0^\infty e^{-x}\cdot\sin(\lambda x)\,dx=1-\lambda\int_0^\infty e^{-x}\cdot\sin(\lambda x)\,dx$$

Berriro zatikako integrazioa aplikatuz:

$$\begin{matrix} u=\sin(\lambda x) & du=\lambda\cdot\cos(\lambda x)dx \\ dv=e^{-x}dx & v=-e^{-x} \end{matrix}$$:

$$I'(\lambda)=1-\lambda\left[-e^{-x}\cdot\sin(\lambda x)\Big|_0^\infty+\lambda\cdot\int_0^\infty e^{-x}\cdot\cos(\lambda x)\,dx\right]=1-\lambda^2\cdot I'(\lambda)$$

Orduan $(1+\lambda^2)\cdot I'(\lambda)=1 \iff I'(\lambda)=\frac{1}{1+\lambda^2} \iff I(\lambda)=\int\frac{d\lambda}{1+\lambda^2}=\operatorname{arctg}(\lambda)+k$

Eta $\left\{\begin{array}{l} I(0)=\int_0^\infty e^{-x}\cdot\frac{\sin(0)}{x}dx=0 \\ I(0)=\operatorname{arctg}(0)+k=0 \end{array}\right. \Rightarrow k=0$

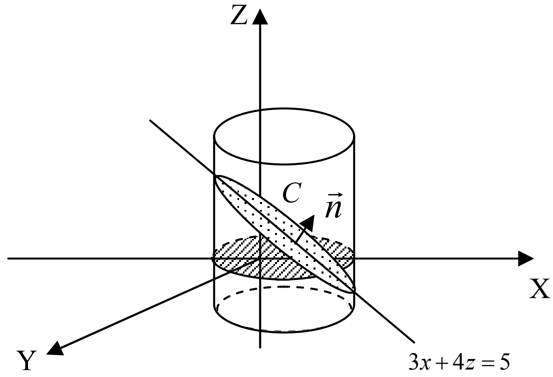
Beraz, $I(\lambda)=\operatorname{arctg}(\lambda)$

6.- $\vec{F}(x,y,z)=(z+5)\cdot\vec{i}+(x+4)\cdot\vec{j}+(y+7)\cdot\vec{k}$ bektorea emanik:

a) Kalkulatu $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, non $C\equiv\begin{cases}3x+4z=5\\(x-1)^2+y^2=4\end{cases}$.

b) Kalkulatu $\vec{F}$-ren fluxua $V\equiv\begin{cases}\varphi\le\dfrac{\pi}{e}\\z\le \mathrm{L}7-x^2-y^2\end{cases}$ bolumena mugatzen duen gainazal itxian zehar.

(2 puntu)



a) Atal hau bi eratan egin daiteke:

(i) C kurba parametrizatuko dugu lerro-integrala zuzenean kalkulatzako:

$$C\equiv\begin{cases}3x+4z=5\\(x-1)^2+y^2=4\end{cases}\equiv\begin{cases}x=1+2\cos t\\y=2\sin t\\z=\dfrac{5}{4}-\dfrac{3}{4}(1+2\cos t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\cos t\end{cases},0\le t\le 2\pi$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_C\big((z+5)dx+(x+4)dy+(y+7)dz\big)=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-2\left(\frac{11}{2}-\frac{3}{2}\cos t\right)\sin t+2(5+2\cos t)\cos t+\frac{3}{2}(7+2\sin t)\sin t\right)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-11\sin t+3\sin t\cos t+10\cos t+4\cos^2 t+\frac{21}{2}\sin t+3\sin^2 t\right)dt=$$

$$=11\cos t+3\frac{\sin^2 t}{2}+10\sin t+4\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right)-\frac{21}{2}\cos t+3\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin(2t)}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=4\pi+3\pi=7\pi$$

(ii) C kurba itxia denez Stokes-en teorema erabil daiteke:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}\,d\vec{S}=\iint_S\left(dydz+dzdx+dxdy\right)$$

Non $S\equiv z=\dfrac{5}{4}-\dfrac{3}{4}x \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}z'_x=-\dfrac{3}{4}\\z'_y=0\end{cases}$, orduan:

$$\iint_S (dydz + dzdx + dxdy) = \pm \iint_{R_{xy}} \left(\frac{3}{4}+1\right) dxdy \overset{(*)}{=} \frac{7}{4} \iint_{R_{xy}} dxdy = \frac{7}{4} \cdot \text{Azalera}\left(R_{xy}\right) \overset{(**)}{=} 7\pi$$

(*) $\quad \gamma < \dfrac{\pi}{2}$

(**) $\quad R_{xy} \equiv (x-1)^2 + y^2 \le 4$

b) V bolumenaren muga S gainazal itxia denez, fluxua kalkulatzeko Gauss-en teorema erabil dezakegu:

$$\Phi_S\left(\vec{F}\right) = \iint_S \vec{F} d\vec{S} = \iiint_V \underbrace{div\left(\vec{F}\right)}_{=0} dxdydz = 0$$

7.- Kalkulatu, **integrazioa erabiliz**, $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ parametroaren balioen arabera, $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le a^2 \\ x^2 + y^2 \le 4 \end{cases}$ bolumena.

(2 puntu)

Bi egoera ezberdin izan ditzakegu:

(a) Baldin $a \le 2$, gainazalek mugaturiko bolumena $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ esferarena besterik ez da:

$$V \equiv \frac{4}{3}\pi a^3$$

(Esferikoetan planteatuta:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\varphi d\theta = 2\pi \cdot \int_0^{\pi} \sin\varphi \cdot \frac{a^3}{3} d\varphi = \frac{2\pi a^3}{3}\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} = \frac{4\pi a^3}{3}\text{)}$$

(b) Baldin $a > 2$, bolumena zilindrikoetan kalkulatuko dugu:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta\,, J = \rho, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le 2, \quad 0 \le z \le \sqrt{a^2 - \rho^2} \qquad (*) \\ z = z \end{cases}$$

Orduan:

$$V = 2 \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}} \rho dz d\rho d\theta = 4\pi \cdot \int_0^{2} \rho\sqrt{a^2 - \rho^2} d\rho = 4\pi \cdot \frac{(a^2 - \rho^2)^{3/2}}{3/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \qquad (**)$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\left[(a^2 - 4)^{3/2} - a^3\right] = \frac{4\pi}{3}\left[a^3 - (a^2 - 4)^{3/2}\right]$$

((*) adierazpenean bolumenaren goiko erdia mugatuta dago bakarrik, horregatik (**) formulan integrala bider 2 biderkatuta dago)

<u>Oharra</u>: Marrazkian erakusten den egoera (b) atalekoa da: