Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	1. Zatia

Azterketak 7 ariketa ditu bi zatitan bananduta. Guztira 12 puntu dira eta azterketa gainditzeko 6 puntu atera behar dira.

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

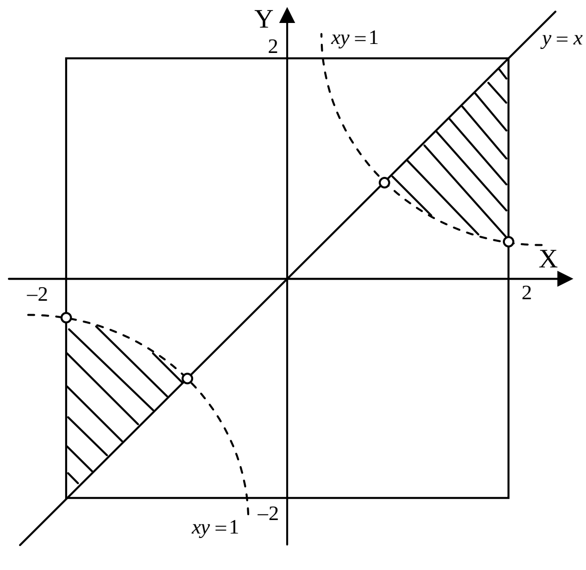
1.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y) = \mathrm{L}(xy-1) + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \arccos\left(\frac{y}{2}\right) + \sqrt{x^2 - xy}$$

(1.5 puntu)

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, xy-1>0,\ -1\le\frac{x}{2}\le 1, -1\le\frac{y}{2}\le 1,\ x^2-xy\ge 0\right\}$$

- $xy-1>0 \quad\Leftrightarrow\quad xy>1$
- $-1\le\frac{x}{2}\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad -2\le x\le 2$
- $-1\le\frac{y}{2}\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad -2\le y\le 2$
- $x^2-xy = x(x-y)\ge 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x\ge 0 \quad\wedge\quad x\ge y \\ x\le 0 \quad\wedge\quad x\le y \end{cases}$



2.- $$f(x,y)=\begin{cases} x+\mathrm{L}(1+x^2+y^2)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{Baldin}\quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{Baldin}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ **funtzioa**

emanik:

a) Estudiatu *f* funtzioaren jarraitutasuna (0,0) puntuan.
b) Kalkulatu *f* funtzioaren deribatu partzialak (0,0) puntuan.
c) Estudiatu *f* funtzioaren direntziagarritasuna (0,0) puntuan.

(1.5 puntu)

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0+0\cdot\text{mugatua}=0=f(0,0) \quad\Leftrightarrow\quad$ *f* jarraitua (0,0) puntuan

b) $$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h+\mathrm{L}(1+h^2)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{h^2}\right)}{h}\sim 1+\lim_{h\to0}\frac{h^2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{h^2}\right)}{h}=$$
$$=1+\lim_{h\to0}h\cdot\sin\left(\frac{1}{h^2}\right)=1+0\cdot\text{mugatua}=1+0=1$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{h\to0}\frac{\mathrm{L}(1+k^2)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{k^2}\right)}{k}\sim\lim_{h\to0}\frac{k^2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{k^2}\right)}{k}=$$
$$=0\cdot\text{mugatua}=0$$

c) *f* diferentziagarria da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

Kasu honetan:
$$\Leftrightarrow\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|h+\mathrm{L}(1+h^2+k^2)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{h^2+k^2}\right)-h\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}\overset{\text{polarretan}}{=}\lim_{\rho\to0^+}\frac{\mathrm{L}(1+\rho^2)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{\rho^2}\right)}{\rho}\sim$$
$$\sim\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{\rho^2}\right)}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\rho\cdot\sin\left(\frac{1}{\rho^2}\right)=0\cdot\text{mugatua}=0\quad\forall\theta$$

Beraz, *f* diferentziagarria da (0,0) puntuan.

3.- $P(x,y)=\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$ **puntuaren inguruneko tenperatura** $T(x,y)=\sqrt{2}\cdot e^{-y}\cdot\cos x$ **funtzioak adierazten du. *P* puntutik abiatuz:**
a) Aurkitu norabidea eta noranzkoa non tenperatura arinen jaitsiko den.
b) Aurkitu norabidea non tenperatura konstantea izango den.
c) Aurkitu *P* puntuari dagokion maila-kurba eta puntu horretako zuzen ukitzailea.
d) OX^{+} **ardatzarekin** 30^{o} **angelua osatzen duen norabidean, tenperatura igoko edo jaitsiko da?**

(2 puntu)

a) Norabidea non tenperatura arinen aldatuko den gradientearena litzateke. Gradientearen noranzkoan, berriz, funtzioaren balioak igotzen dira beraz, kasu honetan eman behar dugun erantzuna gradientearen kontrakoa da:

$$-\vec{\nabla}T=(-T'_x,-T'_y)$$

$$\left.\begin{array}{l} T'_x=-\sqrt{2}\cdot e^{-y}\cdot\sin x \quad\Rightarrow\quad T'_x(P)=-1 \\ T'_y=-\sqrt{2}\cdot e^{-y}\cdot\cos x \quad\Rightarrow\quad T'_y(P)=-1 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad -\vec{\nabla}T(P)=(1,1)$$

b) Tenperatura konstantea da gradientearekiko norabide elkartzutan:

$$\vec{u}\perp\vec{\nabla}T=(1,1) \quad\Leftrightarrow\quad \vec{u}=(1,-1)$$

c) *P* puntuari dagokion maila-kurba lortzeko, puntu horretako tenperatura ezagutu behar dugu:

$$T(P)=\sqrt{2}\cdot e^{0}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=1$$

Eta tenperatura hori duten puntuek maila-kurba osatuko dute. Hau da:

$$\sqrt{2}\cdot e^{-y}\cdot\cos x=1 \quad\Leftrightarrow\quad y=\mathrm{L}\left(\sqrt{2}\cdot\cos x\right)$$

Eta zuzen ukitzailea:

$\begin{cases} y=m\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) \\ T=1 \end{cases}$ non malda aurreko ataleko $\vec{u}=(1,-1)$ bektoreak adierazten digu.

Hau da, $m=-1 \quad\Rightarrow\quad y=-\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y=\dfrac{\pi}{4}-x \\ T=1 \end{cases}$

d) $\vec{v}=(\cos 30^{\text{o}},\sin 30^{\text{o}})=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ norabidean tenperaturaren aldakuntza kalkulatu behar dugu:

$\left.\dfrac{dT}{d\vec{v}}\right|_P \overset{(*)}{=}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot T'_x(P)+\dfrac{1}{2}\cdot T'_y(P)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}<0 \quad\Rightarrow$ tenperatura jaitsiko da, aldakuntza negatiboa baita.

(*) *T* diferentziagarria da.

4.- $\begin{cases} F(x,y,z) = g\left(x, yz^2\right) - xze^x - 1 = 0 \\ G(x,y,z) = h\left(x^2 \cdot e^{y+x^2}\right) - z = 0 \end{cases}$ **sistemak, *g* eta *h* jarraituak deribatu partzial jarraituekin direlarik,** $y = y(x)$ **eta** $z = z(x)$ **funtzioak definitzen ditu** $P(x,y,z) = (0,0,1)$ **puntuaren ingurune batean.**

a) Kalkulatu $g(0,0)$ **eta** $h(0)$**.**

b) $\vec{\nabla} g(0,0) = (-1,1)$ **dela ezagutuz, kalkulatu** $y'(0)$ **eta** $z'(0)$**.**

(1.5 puntu)

a) Funtzio inplizituaren teoremaren lehenengo baldintzaren arabera:

$$\begin{cases} F(0,0,1) = g\left(0,0\right) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g\left(0,0\right) = 1 \\ G(0,0,1) = h\left(0\right) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h\left(0\right) = 1 \end{cases}$$

b) $\vec{\nabla} g(0,0) = (-1,1) \quad \Rightarrow \quad g'_x(0,0) = -1$ eta $g'_u(0,0) = 1$ non $u = yz^2$

Emandako sisteman *x*-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} g'_x + g'_u \cdot \left(y' \cdot z^2 + 2yz \cdot z'\right) - ze^x - xz' \cdot e^x - xze^x = 0 \\ h' \cdot \left(2x \cdot e^{y+x^2} + x^2 \cdot (y' + 2x) \cdot e^{y+x^2}\right) - z' = 0 \end{cases}$$

Eta $P(x,y,z) = (0,0,1)$ puntuan ordeztatuz:

$$\begin{cases} g'_x(0,0) + g'_u(0,0) \cdot y'(0) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 + y'(0) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'(0) = 2 \\ z'(0) = 0 \end{cases}$$

Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	2. Zatia

Azterketak 7 ariketa ditu bi zatitan bananduta. Guztira 12 puntu dira eta azterketa gainditzeko 6 puntu atera behar dira.

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

5.- Aurkitu $f(x,y)=\int_{-1}^{x}\frac{\sin t}{t+2}dt-\int_{-1}^{y}\frac{\cos t}{t+2}dt$ **funtzioaren mutur erlatiboak, non** $x,y\in(-1,2)$**.**

(1.5 puntu)

Deribazio parametrikoaz baliatuko gara.
Baldintza beharrezkoa:

$$\left.\begin{array}{l} f'_x=\dfrac{\sin x}{x+2}=0 \overset{x\in(-1,2)}{\Leftrightarrow} x=0 \\ f'_y=-\dfrac{\cos y}{y+2}=0 \overset{y\in(-1,2)}{\Leftrightarrow} y=\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \Rightarrow P\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \text{ puntu kritiko dugu.}$$

Baldintza nahikoa:

$$\left.\begin{array}{l} f''_{x^2}=\dfrac{\cos x}{x+2}-\dfrac{\sin x}{(x+2)^2} \Rightarrow f''_{x^2}(P)=\dfrac{1}{2} \\ f''_{y^2}=\dfrac{\sin y}{y+2}+\dfrac{\cos y}{(y+2)^2} \Rightarrow f''_{y^2}(P)=\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2} \\ f''_{xy}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d^2f(P)=\frac{1}{2}(dx)^2+\left(\frac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2}\right)(dy)^2>0$$

Beraz, P minimo erlatiboa da.

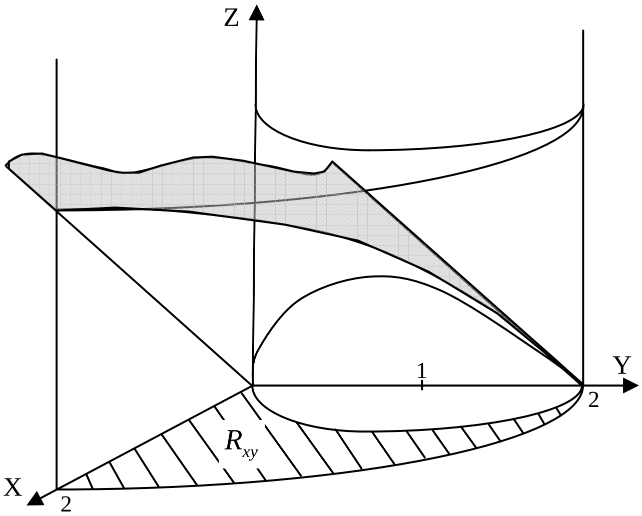
6.- a) Kalkulatu hurrengo erara definituriko solidoaren bolumena:

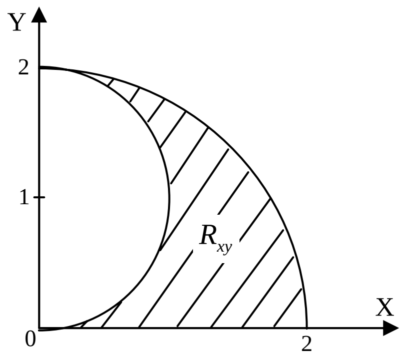
$$\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ x^2+y^2-2y \ge 0 \\ z \le x \end{cases} \quad \textbf{non } x \ge 0,\ y \ge 0 \text{ eta } z \ge 0 \textbf{.}$$

b) Kalkulatu aurreko solidoaren mugako $z = x$ gainazalaren zatiaren azalera.

(2 puntu)

a)





Zilindrikoetan: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad |J| = \rho$

$$\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ x^2+y^2-2y \ge 0 \\ z \le x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho \le 2 \\ \rho \ge 2\sin\theta \\ z \le \rho\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad 2\sin\theta \le \rho \le 2 \quad 0 \le z \le \rho\cos\theta$$

$$\text{Bolumena} = \int_0^{\pi/2}\int_{2\sin\theta}^{2}\int_0^{\rho\cos\theta} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_{2\sin\theta}^{2} \rho^2\cdot\cos\theta\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\cos\theta\cdot\left(\frac{8}{3}-\frac{8\sin^3\theta}{3}\right)d\theta =$$

$$= \frac{8}{3}\left(\sin\theta - \frac{\sin^4\theta}{4}\right)_0^{\pi/2} = \frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right) = 2$$

b) $\text{Azalera} = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\, dxdy \overset{(1)}{=}$

(1) $R_{xy} \equiv 2y \le x^2+y^2 \le 4$ (polarretan $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad 2\sin\theta \le \rho \le 2$) eta $z = x \Rightarrow \begin{cases} z'_x = 1 \\ z'_y = 0 \end{cases}$

$$\overset{(1)}{=} \int_0^{\pi/2}\int_{2\sin\theta}^{2} \rho\sqrt{2}\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2}(2-2\sin^2\theta)\, d\theta = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\, d\theta = 2\sqrt{2}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right)_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

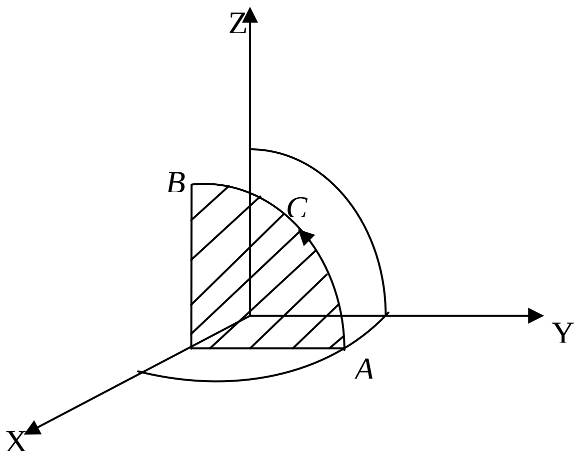
7.- Izan bitez $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 4$ gainazala eta $\vec{F} = x^2 \cdot \vec{i} + yz \cdot \vec{j} - yz \cdot \vec{k}$ bektorea.

a) Kalkulatu $\vec{F}$ bektorearen lerro-integrala $A = (1, \sqrt{3}, 0)$ puntutik $B = (1, 0, \sqrt{3})$ puntura, *S* eta $x = 1$ gainazalen arteko ebakidura-kurban zehar.

b) Kalkulatu $\vec{F}$ bektorearen fluxua, *S* gainazalak eta plano koordenatuek lehenengo oktantean mugatzen duten $x = 1$ planoaren zatian zehar.

(2 puntu)

a)



$$C \equiv \begin{cases} S \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} y^2 + z^2 = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{3} \cdot \cos t \\ z = \sqrt{3} \cdot \sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{C(A\to B)} \vec{F} d\vec{r} = \int_{C(A\to B)} \left(x^2 \cdot dx + yz \cdot dy - yz \cdot dz \right) =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-3\sqrt{3} \sin^2 t \cdot \cos t - 3\sqrt{3} \cos^2 t \cdot \sin t \right) dt = \left[-\sqrt{3} \sin^3 t + \sqrt{3} \cos^3 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2\sqrt{3}$$

b) $\Phi_{x=1} = \iint_{x=1} \left(x^2 dydz + yzdzdx - yzdxdy \right) \overset{(x=1 \Rightarrow dx=0)}{=} \iint_{R_{yz}} dydz = \text{Azalera}\left(R_{yz} \right) \overset{(*)}{=} \frac{3\pi}{4}$

(*) $R_{yz} \equiv \begin{cases} y^2 + z^2 \le 3 \\ y \ge 0,\ z \ge 0 \end{cases}$

Polarretan: $\begin{cases} y = \rho \cos\theta \\ z = \rho \sin\theta \end{cases} \Rightarrow R_{yz} \equiv \rho \le \sqrt{3} \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ (zirkulu laurdena hain zuzen ere)