Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	1. Zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\frac{\mathrm{L}(y-\sin x)}{xy\sqrt{e^{-x}-y}}+\arctan\left(\sqrt{\pi^2-x^2-y^2}\right)$$

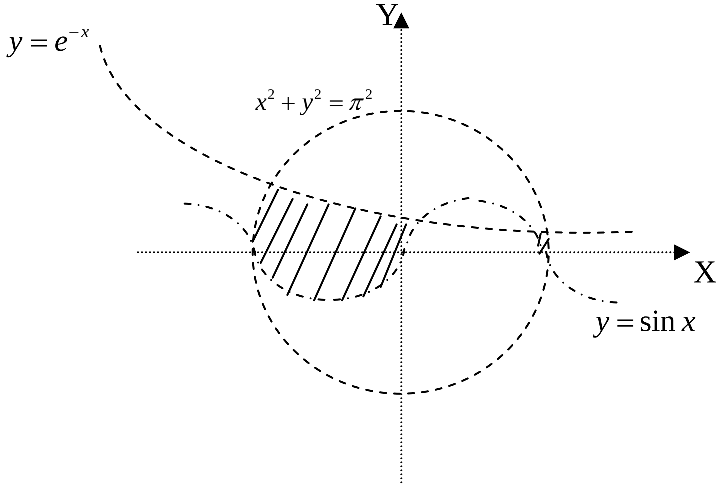
(2 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y-\sin x>0,\ e^{-x}-y>0,\ xy\neq 0,\ \pi^2-x^2-y^2\geq 0\right\}$$

$$\left.\begin{array}{lll} e^{-x}-y>0 & \Leftrightarrow & y<e^{-x} \\ y-\sin x>0 & \Leftrightarrow & y>\sin x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \sin x<y<e^{-x}$$

$$\pi^2-x^2-y^2\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2\leq \pi^2$$

$$xy\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x\neq 0\,, \quad y\neq 0$$



2.- $f(x,y)=\begin{cases} e^{\frac{-x^3y}{x^2+y^2}} & \forall(x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **funtzioa emanik:**

a) Estudiatu bere jarraitutasuna (0,0) puntuan

b) Kalkulatu $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$

c) Estudiatu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan

d) Estudiatu bere deribagarritasuna (0,0) puntuan

(2 puntu)

a) Jarraitutasuna (0,0) puntuan:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{-x^3y}{x^2+y^2}} \overset{(\text{polarretan})}{=} \lim_{\rho\to0^+} e^{\frac{-\rho^4\cos^3\theta\cdot\sin\theta}{\rho^2}} = \lim_{\rho\to0^+} e^{-\rho^2\cos^3\theta\cdot\sin\theta}=e^0=1=f(0,0)$$

Beraz, *f* jarraitua da (0,0) puntuan.

b) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^{\frac{0}{h^2}}-1}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1-1}{h}=0$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{e^{\frac{0}{k^2}}-1}{k}=\lim_{k\to0}\frac{1-1}{k}=0$$

c) *f* diferentziagarria da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|e^{\frac{-h^3k}{h^2+h^2}}-1\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} \overset{(\text{polarretan})}{=} \lim_{\rho\to0^+}\frac{\left|e^{\frac{-\rho^4\cos^3\theta\cdot\sin\theta}{\rho^2}}-1\right|}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\left|e^{-\rho^2\cos^3\theta\cdot\sin\theta}-1\right|}{\rho}\sim$$

$$\sim\lim_{\rho\to0^+}\frac{\left|\mathrm{L}\left(e^{-\rho^2\cos^3\theta\cdot\sin\theta}\right)\right|}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\left|-\rho^2\cos^3\theta\cdot\sin\theta\right|}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\rho\left|\cos^3\theta\cdot\sin\theta\right|=0 \quad \forall\theta$$

Beraz, *f* diferentziagarria da (0,0) puntuan.

d) *f* diferentziagarria da (0,0) puntuan $\Rightarrow$ *f* deribagarria da (0,0) puntuan

3.- $\begin{cases} F(x,y,z,t) = x + 2y - 3xz + t - 1 = 0 \\ G(x,y,z,t) = x - 2yt - z = 0 \end{cases}$ **ekuazio-sistema eta** $P(1,-1,-1,-1)$ **puntua emanik:**

a) **Frogatu sistemak** $z = z(x,y)$ **eta** $t = t(x,y)$ **funtzio inplizituak definitzen dituela *P* puntuaren ingurune batean.**

b) **Baldin (1,-1) puntuaren ingurune batean** (x,y) **puntu guztietarako *z* altuera eta *t* tenperatura badira eta, puntu horretatik abiatuz,** $\vec{u} = (1,1)$ **bektorearen norabidea jarraituz mugitzen bagara, *z* eta *t* igoko edo jaitsiko dira?**

(2.5 puntu)

a) Funtzio inplizituaren teorema egiaztatu behar da:

I. $\begin{cases} F(P) = 1 - 2 + 3 - 1 - 1 = 0 \\ G(P) = 1 - 2 + 1 = 0 \end{cases}$

II. *F* eta *G* funtzioen deribatu partzialak existitzen eta jarraituak dira $\mathbb{R}^4$ osoan:

$$F'_x = 1 - 3z \quad F'_y = 2 \quad F'_z = -3x \quad F'_t = 1$$
$$G'_x = 1 \quad G'_y = -2t \quad G'_z = -1 \quad G'_t = -2y$$

III. $\left| \dfrac{D(F,G)}{D(z,t)} \right|_P = \begin{vmatrix} -3x & 1 \\ -1 & -2y \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 1 = -5 \neq 0$

Beraz, $\exists \begin{cases} z = z(x,y) \\ t = t(x,y) \end{cases}$ diferentziagarriak, eta $\begin{cases} z(1,-1) = -1 \\ t(1,-1) = -1 \end{cases}$

b) *z* eta *t* funtzioen deribatu direkzionalak kalkulatu behar ditugu.
Beraz, euren deribatu partzialak lortzeko, emandako sisteman deribatuko dugu:

<u>*x*-rekiko</u>:

$$\begin{cases} 1 - 3z - 3x \cdot z'_x + t'_x = 0 \\ 1 - z'_x - 2y \cdot t'_x = 0 \end{cases} \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \begin{cases} -3z'_x(1,-1) + t'_x(1,-1) = -4 \\ -z'_x(1,-1) + 2t'_x(1,-1) = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z'_x(1,-1) = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5} \quad \text{eta} \quad t'_x(1,-1) = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$$

<u>*y*-rekiko</u>:

$$\begin{cases} 2 - 3x \cdot z'_y + t'_y = 0 \\ -2t - z'_y - 2y \cdot t'_y = 0 \end{cases} \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \begin{cases} -3z'_y(1,-1) + t'_y(1,-1) = -2 \\ -z'_y(1,-1) + 2t'_y(1,-1) = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z'_y(1,-1) = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5} \quad \text{eta} \quad t'_y(1,-1) = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5}$$

$\vec{u} = (1,1)$ unitario bihurtuko dugu, $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right)$ eta, honela:

$$\left. \frac{dz}{d\vec{u}} \right|_{(1,-1)} = \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{9}{5\sqrt{2}} > 0 \quad \Rightarrow$$ *z*, altuera, igoko da.

$$\left. \frac{dt}{d\vec{u}} \right|_{(1,-1)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{5\sqrt{2}} < 0 \quad \Rightarrow$$ *t*, tenperatura, jaitsiko da.

4.- Izan bitez $\varphi=\varphi(x-y)$ funtzio hertsiki gorakorra eta positiboa eta $g(x,y)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x-y^2+\frac{\pi}{2}} \varphi(x-y)\cdot\frac{\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda$, biak diferentziagarriak.

a) **Aurkitu *g*-ren gradientea $(x,y)=(1,1)$ puntuan.**

b) **Existitzen da $\vec{u}=(h_1,h_2)$ bektore unitariorik zeinerako *g*-ren deribatu direkzionala aurreko puntuan $3\cdot\varphi(0)$ izan daitekeen?**

(2 puntu)

a) $\overrightarrow{\nabla g}(1,1)=g'_x(1,1)\cdot\vec{i}+g'_y(1,1)\cdot\vec{j}$

g integral parametrikoa denez, deribazio parametrikoa erabiliko dugu bere deribatu partzialak kalkulatzeko:

$$g'_x(x,y)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x-y^2+\frac{\pi}{2}} \varphi'(x-y)\cdot\frac{\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda+\varphi(x-y)\cdot\frac{\sin\left(x-y^2+\frac{\pi}{2}\right)}{x-y^2+\frac{\pi}{2}} \quad\Rightarrow\quad g'_x(1,1)=\frac{2\varphi(0)}{\pi}$$

$$g'_y(x,y)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x-y^2+\frac{\pi}{2}} -\varphi'(x-y)\cdot\frac{\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda-2y\cdot\varphi(x-y)\cdot\frac{\sin\left(x-y^2+\frac{\pi}{2}\right)}{x-y^2+\frac{\pi}{2}} \quad\Rightarrow\quad g'_y(1,1)=\frac{-4\varphi(0)}{\pi}$$

Beraz, $\overrightarrow{\nabla g}(1,1)=\frac{2\varphi(0)}{\pi}\cdot\vec{i}-\frac{4\varphi(0)}{\pi}\cdot\vec{j}$

b) $\vec{u}=(h_1,h_2)$ bektore unitarioa emanik, *g*-ren deribatu direkzionalak (1,1) puntuan *g*-ren aldakuntza $\vec{u}=(h_1,h_2)$ bektorearen norabidean adierazten du.

Gradientearen norabidean, berriz, *g*-ren aldakuntza maximoa lortzen dugu, eta bere balioa bere modulua da. Hortaz, $\left|\overrightarrow{\nabla g}(1,1)\right|=\sqrt{\left(\frac{2\varphi(0)}{\pi}\right)^2+\left(-\frac{4\varphi(0)}{\pi}\right)^2}\overset{(*)}{=}\frac{2\sqrt{5}}{\pi}\varphi(0)$ *g*-ren deribatu direkzional maximoa da.

Eta $\frac{2\sqrt{5}}{\pi}\varphi(0)<3\cdot\varphi(0)$

Beraz, ezinezkoa da.

(*) φ positiboa baita.

Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	Ariketa 8	2. Zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

5.- $w = x \cdot f[g(y)]$ **funtzioa emanik, frogatu** $x \cdot (w'_x + w'_y) - x^2 \cdot w''_{xy} = w$

(Puntu 1)

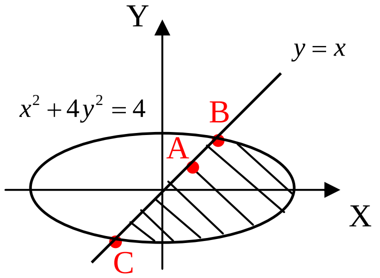
$$\left.{x \atop y}\right\rangle w = x \cdot f - g - y$$

$$\left.\begin{array}{l} w'_x = f[g(y)] \quad \Rightarrow \quad w''_{xy} = f'[g(y)] \cdot g'(y) \\ w'_y = x \cdot f'[g(y)] \cdot g'(y) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x \cdot (w'_x + w'_y) - x^2 \cdot w''_{xy} = x \cdot \left(f + x \cdot f' \cdot g' \right) - x^2 \cdot f' \cdot g' = x \cdot f = w$$

6.- Aurkitu $f(x,y)=x^2+4y^2-x-4y-1$ funtzioaren mutur absolutuak $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+4y^2\le 4, y\le x\right\}$ multzoan.

(2 puntu)



f funtzio jarraitua da M multzo itxi eta mugatuan, orduan Weiestrass-en teoremak ziurtatzen digu multzo horretan f-ren maximo eta minimo absolutuak existitzen direla.

a) f-ren puntu kritiko ez-baldintzatuak kalkulatzen hasiko gara:

$$\left\{\begin{array}{l} f'_x=2x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{1}{2} \\ f'_y=8y-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\rangle \Rightarrow \quad A=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\in M \text{ puntu kritikoa da.}$$

b) Orain, f-ren puntu kritiko baldintzatuak (M multzoaren mugan daudenak) kalkulatuko ditugu. M-ren muga bi zatitan bananduta dagoenez, bakoitza baldintza baten bitartez adierazita dagoena, hiru kasu bereiziko ditugu:

b.1) $y=x \quad \Rightarrow \quad f(x,x)=F(x)=5x^2-5x-1 \quad \Rightarrow \quad F'(x)=10x-5=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{1}{2}$

Eta, berriro, A puntu kritikoa lortzen dugu.

b.2) $x^2+4y^2=4 \quad \Rightarrow \quad w(x,y)=x^2+4y^2-x-4y-1+\lambda(x^2+4y^2-4)$ funtzioa dugu Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiltzeko. Honela:

$$\left\{\begin{array}{l} w'_x=2x-1+2\lambda x=0 \Leftrightarrow 2x(1+\lambda)-1=0 \\ w'_y=8y-4+8\lambda y=0 \Leftrightarrow 8y(1+\lambda)-4=0 \\ x^2+4y^2=4 \end{array}\right. \overset{(*)}{\Rightarrow} 1+\lambda=\frac{1}{2x}=\frac{4}{8y} \Leftrightarrow x=y \Big\rangle \Rightarrow$$

(*) Baldin $x=0 \Rightarrow -1=0$

$$\Rightarrow \quad 5x^2=4 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}=y$$

Beraz, $B=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ eta $C=\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}},-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ puntu kritikoak ditugu.

b.3) Mugaren zati bien arteko ebaki-puntuak ere kontuan hartu behar dira. Mugako erpinak, alegia (hau da, baldintza biak batera egiaztatzen dituztenak: $x^2+4y^2=4 \ \wedge \ y=x$

Kasu honetan, aldez aurretik lortutako B eta C puntuak lortzen ditugu.

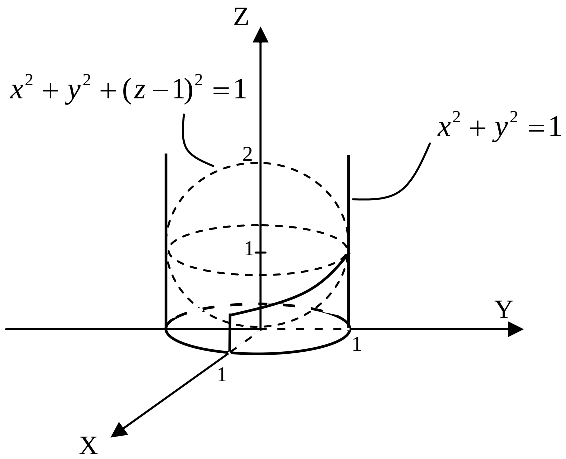
Puntu hauetan guztietan f-ren balioak konparatuz:

$$f(A)=-\frac{9}{4} \qquad f(B)=\frac{3\sqrt{5}-10}{\sqrt{5}} \qquad f(C)=\frac{3\sqrt{5}+10}{\sqrt{5}}$$

Beraz, A minimo eta C maximo absolutuak dira.

7.- Kalkulatu $V \equiv \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ x^2+y^2+(z-1)^2 \ge 1 \\ 0 \le z \le 1 \\ x \ge 0\,;\, y \ge 0 \end{cases}$ **solidoa mugatzen duen *S* gainazal itxitik irtengo den** $\vec{F} = (x+y^2)\cdot\vec{i} + (y-e^z)\cdot\vec{j} - [z+\cos(xy)]\cdot\vec{k}$ **bektorearen fluxua.**

(2 puntu)



Gauss-en teoremaren baldintzak egiaztatzen direnez:

$$\Phi_S\left(\vec{F}\right) = \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V div\left(\vec{F}\right) dxdydz$$

$$\vec{F} = (x+y^2)\cdot\vec{i} + (y-e^z)\cdot\vec{j} - [z+\cos(xy)]\cdot\vec{k} \quad \Rightarrow \quad div\left(\vec{F}\right) = 1+1-1=1$$

Beraz, $\Phi_S\left(\vec{F}\right) = \iiint_V dxdydz \overset{(*)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{1-\sqrt{1-\rho^2}} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho\left(1-\sqrt{1-\rho^2}\right)d\rho =$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^2}{2} + \frac{\left(1-\rho^2\right)^{3/2}}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right] = \frac{\pi}{12}$$

(*) Zilindrikoetan: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad V \equiv \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \le 1 \\ \left.\begin{array}{l} x^2+y^2+(z-1)^2 \ge 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho^2+(z-1)^2 \ge 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad 0 \le z \le 1-\sqrt{1-\rho^2} \quad \Rightarrow \\ x \ge 0\,;\, y \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad V \equiv \left\{ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad 0 \le \rho \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le z \le 1-\sqrt{1-\rho^2} \right\}$$

8.- $U(x,y)=\alpha\cdot x^2+\beta\cdot y^2+(\alpha+\beta)\cdot xy$ **funtzioa emanik:**

a) Kalkulatu α **eta** β**,** $\int_{A(0,0)}^{B(0,1)}\overrightarrow{\nabla U}\cdot d\vec{r}=2$ **eta** $\int_{B(0,1)}^{C(1,1)}\overrightarrow{\nabla U}\cdot d\vec{r}=4$ **ezagutuz.**

b) Kalkulatu ***U*** **funtzioaren deribatua (1,1) puntuan koordenatu jatorrirantz joaten garenean.**

(2.5 puntu)

a) $\vec{F}=\overrightarrow{\nabla U}$ $\Leftrightarrow$ $\exists U$ funtzio eskalarra $\vec{F}$-ren funtzio potentziala dena $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\int \vec{F}d\vec{r}$ bidearekiko independentea $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{A(0,0)}^{B(0,1)}\overrightarrow{\nabla U}\cdot d\vec{r}=U(B)-U(A)=\beta=2 \\ \int_{B(0,1)}^{C(1,1)}\overrightarrow{\nabla U}\cdot d\vec{r}=U(C)-U(B)=\alpha+\beta+\alpha+\beta-\beta=2\alpha+\beta=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=1\\ \beta=2\end{cases}$$

b) (1,1) puntutik jatorrirantz abiatzen bagara, $\vec{v}=(h_1,h_2)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ bektore unitarioak adierazitako norabidea jarraitzen ari gara. Kalkulatu behar duguna hauxe da:

$$\left.\frac{dU}{d\vec{v}}\right|_{(1,1)}=U'_x(1,1)\cdot h_1+U'_y(1,1)\cdot h_2$$

$$\begin{cases}U'_x=2\alpha x+(\alpha+\beta)y\\ U'_y=2\beta y+(\alpha+\beta)x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}U'_x(1,1)=2\alpha+\alpha+\beta=3\alpha+\beta\\ U'_y(1,1)=2\beta+\alpha+\beta=3\beta+\alpha\end{cases}$$

Beraz, $\left.\frac{dU}{d\vec{v}}\right|_{(1,1)}=-\frac{3\alpha+\beta}{\sqrt{2}}-\frac{\alpha+3\beta}{\sqrt{2}}=-\frac{4(\alpha+\beta)}{\sqrt{2}}\underset{\substack{\downarrow\\ (\alpha=1,\ \beta=2)}}{=}-\frac{12}{\sqrt{2}}=-6\sqrt{2}$