Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	1. Zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\frac{\mathrm{L}\left(y^2-x\right)}{\sqrt{x^2+y^2-1}}+\arcsin\left(|x|+|y|-1\right)$$

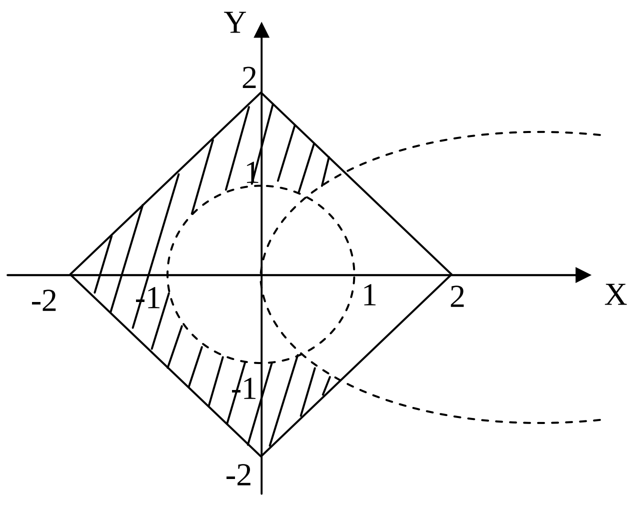
(2 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y^2-x>0,\ x^2+y^2-1>0,\ -1\le|x|+|y|-1\le 1\right\}$$

$y^2-x>0 \quad\Leftrightarrow\quad x<y^2$

$x^2+y^2-1>0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2>1$

$-1\le|x|+|y|-1\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad |x|+|y|\le 2$



2.- $f(x,y)=\begin{cases} \mathrm{L}\left(1+\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right) & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **funtzioa emanik:**

a) Estudiatu bere jarraitutasuna (0,0) puntuan.

b) Kalkulatu $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$.

c) Estudiatu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.

d) Aztertu f'_x eta f'_y deribatuen jarraitutasuna (0,0) puntuan.

(1.5 puntu)

a) Jarraitutasuna (0,0) puntuan:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \mathrm{L}\left(1+\frac{xy}{x^2+y^2}\right) \overset{(\text{polarretan})}{=} \lim_{\rho\to0^+} \mathrm{L}\left(1+\frac{\rho^2\cos\theta\cdot\sin\theta}{\rho^2}\right)=$$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\mathrm{L}\left(1+\cos\theta\cdot\sin\theta\right)\neq 0 = f(0,0)$$

Beraz, *f* ez da jarraitua (0,0) puntuan.

b) $f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{\mathrm{L}\left(1+\dfrac{0}{h^2}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{0}{h}=0$

$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\dfrac{\mathrm{L}\left(1+\dfrac{0}{k^2}\right)}{k}=\lim_{k\to0}\dfrac{0}{k}=0$

c) *f* jarraitua ez denez (0,0) puntuan, orduan ezin da diferentziagarria izan (0,0) puntuan.

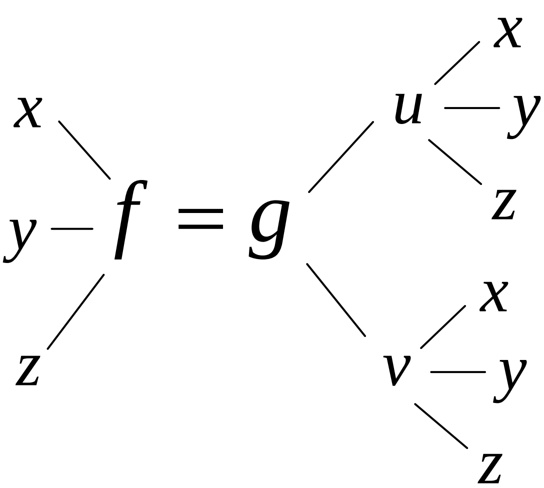
d) *f* diferentziagarria ez denez (0,0) puntuan, orduan deribatu partzialak ezin dira jarraituak izan (0,0) puntuan.

3.- Izan bitez *f* eta *g* funtzio diferentziagarriak non $f(x,y,z)=g(v,w)$ **eta** $\begin{cases} v = x+y+2z \\ w = e^{2x+y+z} \end{cases}$**. Baldin** $\overrightarrow{\nabla g}(0,1)=(1,-1)$**:**

a) Kalkulatu $\overrightarrow{\nabla f}(0,0,0)$**.**

b) Kalkulatu $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0,0)}$ **non** $\vec{u}=(1,2,1)$**. Justifikatu emaitza.**

(2 puntu)



a) $\overrightarrow{\nabla f}(0,0,0)=\left(f'_x(0,0,0),\, f'_y(0,0,0),\, f'_z(0,0,0)\right)$

$$f'_x = g'_u \cdot u'_x + g'_v \cdot v'_x = g'_u + 2e^{2x+y+z}\cdot g'_v$$
$$f'_y = g'_u \cdot u'_y + g'_v \cdot v'_y = g'_u + e^{2x+y+z}\cdot g'_v$$
$$f'_z = g'_u \cdot u'_z + g'_v \cdot v'_z = 2\cdot g'_u + e^{2x+y+z}\cdot g'_v$$

$(x,y,z)=(0,0,0) \Rightarrow (u,v)=(0,1)$

$\overrightarrow{\nabla g}(0,1)=(1,-1) \quad \Rightarrow \quad g'_u(0,1)=1 \quad g'_v(0,1)=-1 \quad \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(0,0,0)=1-2=-1 \\ f'_y(0,0,0)=1-1=0 \\ f'_z(0,0,0)=2-1=1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\nabla f}(0,0,0)=(-1,0,1)$$

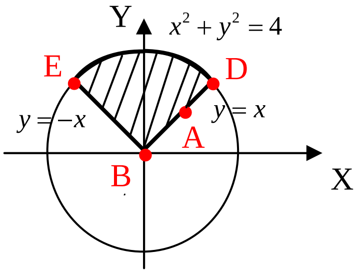
b) $\vec{u}=(1,2,1) \quad \Rightarrow \quad |\vec{u}|=\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ unitarioa da.

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0,0)} = f'_x(0,0,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} + f'_y(0,0,0)\cdot\frac{2}{\sqrt{6}} + f'_z(0,0,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}}=0$$

$\vec{u}=(1,2,1)$ -ren norabidean *f*-ren aldakuntza nulua da $\vec{u}=(1,2,1)\perp\overrightarrow{\nabla f}(0,0,0)=(-1,0,1)$ baitira.

4.- Aurkitu $f(x,y)=x^2+y^2-x-y-1$ funtzioaren mutur absolutuak $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ x^2+y^2\le 4,\ y\ge |x|\right\}$ multzoan.

(2 puntu)



f funtzio jarraitua da M multzo itxi eta mugatuan, orduan Weiestrass-en teoremak ziurtatzen digu multzo horretan f-ren maximo eta minimo absolutuak existitzen direla.

a) f-ren puntu kritiko ez-baldintzatuak kalkulatzen hasiko gara:

$$\left\{\begin{array}{l} f'_x=2x-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\dfrac{1}{2} \\ f'_y=2y-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\rangle \quad\Rightarrow\quad A=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\in M \text{ puntu kritikoa da.}$$

b) f-ren puntu kritiko baldintzatuak (M multzoaren mugan daudenak) kalkulatuko ditugu. M-ren mugan hiru zati ditugunez, bakoitza baldintza baten bitartez adierazita dagoena, lau kasu bereiziko ditugu:

b.1) $y=x \quad\Rightarrow\quad F(x)=2x^2-2x-1 \quad\Rightarrow\quad F'(x)=4x-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\dfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad A$

b.2) $y=-x \quad\Rightarrow\quad F(x)=2x^2-1 \quad\Rightarrow\quad F'(x)=4x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0 \quad\Rightarrow\quad B=(0,0)$

b.3) $x^2+y^2=4 \quad\Rightarrow\quad w(x,y)=x^2+y^2-x-y-1+\lambda(x^2+y^2-4)$ funtzioa dugu Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiltzeko. Honela:

$$\left\{\begin{array}{l} w'_x=2x-1+2\lambda x=0 \Leftrightarrow 2x(1+\lambda)-1=0 \\ w'_y=2y-1+2\lambda y=0 \Leftrightarrow 2y(1+\lambda)-1=0 \\ x^2+y^2=4 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad 2(x-y)(1+\lambda)=0 \left\langle \begin{array}{l} \lambda=-1 \\ x=y \end{array}\right.$$

$\lambda=-1 \quad\Rightarrow\quad -1=0\#$

$x=y \quad\Rightarrow\quad 2x^2=4 \quad\Leftrightarrow\quad x=\pm\sqrt{2} \quad\overset{y\ge 0}{\Rightarrow}\quad y=\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad D=\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ puntu kritikoa dugu.

b.4) Mugaren zati bien arteko ebaki-puntuak ere kontuan hartu behar dira (hau da, baldintza biak batera egiaztatzen dituztenak. Mugako erpinak):

$y=x \ \wedge\ y=-x \quad\Rightarrow\quad B$

$x^2+y^2=4 \ \wedge\ y=x \quad\Rightarrow\quad D$

$x^2+y^2=4 \ \wedge\ y=-x \quad\Rightarrow\quad E=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

Puntu hauetan guztietan f-ren balioak konparatuz:

$$f(A)=-\frac{3}{2} \qquad f(B)=-1 \qquad f(D)=3-2\sqrt{2} \qquad f(E)=3$$

Beraz, A minimo eta E maximo absolutuak dira.

Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	2. Zatia

Azterketaren iraupena: 3 ordu

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

5.- Izan bedi $f(x,y)=1+3x-2y+\int_{xy}^{x^2-y^2} g(x+t)dt$ **diferentziagarria. Kalkulatu** $z=f(x,y)$ **funtzioak adierazitako gainazalari dagokion plano ukitzailea (0,0) puntuan.**

(1.5 puntu)

Plano ukitzailearen ekuazioa:

$$z-f(0,0)=f_x'(0,0)\cdot x+f_y'(0,0)\cdot y$$

$f(0,0)=1$

$$f_x'(x,y)=3+\int_{xy}^{x^2-y^2} g'(x+t)dt+2x\cdot g\left(x+x^2-y^2\right)-y\cdot g\left(x+xy\right) \quad\Rightarrow\quad f_x'(0,0)=3$$

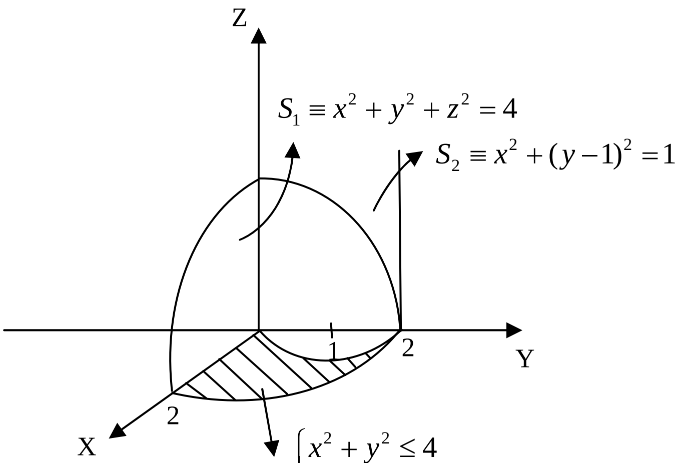
$$f_y'(x,y)=-2+\int_{xy}^{x^2-y^2} g'(x+t)\cdot 0dt-2y\cdot g\left(x+x^2-y^2\right)-x\cdot g\left(x+xy\right) \quad\Rightarrow\quad f_y'(0,0)=-2$$

Orduan, $z=f(x,y)$ funtzioak adierazitako gainazalari dagokion plano ukitzailea (0,0) puntuan honako hau da:

$$z-1=3x-2y \quad\Leftrightarrow\quad z=3x-2y+1$$

6.- $S_1 \equiv x^2+y^2+z^2=4$ **eta** $S_2 \equiv x^2+(y-1)^2=1$ **gainazalak emanik, izan bedi** S_1 **gainazalaren barrutik eta** S_2 **gainazalaren kanpotik lehenengo oktantean definituriko solidoa. Kalkulatu solido horretako muga osatzen duen** S_1 **gainazalaren zatiaren azalera.**

(2 puntu)



$$R_{xy} \equiv \begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ x^2+(y-1)^2 \ge 1 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$$

$$\text{Azalera}\left(S_1\right) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy$$

non

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2} \quad \forall (x,y)\in R_{xy} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z'_x = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ z'_y = \dfrac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \text{Azalera}\left(S_1\right) = \iint_{R_{xy}} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dxdy$$

Polarretan $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ $\quad |J|=\rho \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} S_1 \equiv x^2+y^2+z^2 \le 4 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \le 2 \\ S_2 \equiv x^2+(y-1)^2 \ge 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2-2y \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \ge 2\sin\theta \end{cases}$$

Beraz, $R_{xy} \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 2\sin\theta \le \rho \le 2 \end{cases}$. Orduan:

$$\text{Azalera}\left(S_1\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{2\sin\theta}^{2} \frac{2\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}\,d\rho d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sqrt{4-\rho^2}\right)\Big|_{2\sin\theta}^{2} d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2\theta}\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = 4\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4$$

7.- Izan bitez $\vec{F} = ax \cdot \vec{i} + b(x+y) \cdot \vec{j} + (a-b)z \cdot \vec{k}$ **eremu bektoriala eta** $S \equiv (x-\pi)^2 + (y-e)^2 + (z-e^{\pi})^2 = 1$ **gainazala.**

a) Kalkulatu $div\left(\vec{F}\right)$ **eta** $\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)}$**.**

b) Kalkulatu *a* eta *b* hurrengoa ezagutuz:

- ***S* gainazaletik irteten den** $\vec{F}$ **-ren fluxuak** 8π **balio duela**
- $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4$**, non *C* kurba itxi eta leuna den** $z = 0$ **planoan kokatua eta 2 unitateko azalerako eremua mugatzen duena.**

(3 puntu)

a) $div\left(\vec{F}\right) = a + b + a - b = 2a$

$$\overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} = (0-0) \cdot \vec{i} + (0-0) \cdot \vec{j} + (b-0) \cdot \vec{k} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + b \cdot \vec{k}$$

b) $\Phi_S\left(\vec{F}\right) = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 8\pi$

$\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak eta S gainazal leuna eta itxia, orduan Gauss-en teorema erabil dezakegu (S gainazalak mugaturiko bolumena V izanik):

$$\Phi_S\left(\vec{F}\right) = \iiint_V div\left(\vec{F}\right) dxdydz = 2a \iiint_V dxdydz = 2a \cdot \text{Bolumena}\left(V\right) \overset{(*)}{=} 2a \frac{4\pi}{3} = 8\pi \quad \Leftrightarrow \quad a = 3$$

$(*) V \equiv 1$ erradioko esfera

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \left(ax \cdot dx + b(x+y) \cdot dy + (a-b)z \cdot dz\right) = 4$$

$\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak eta C kurba itxia eta leuna, orduan Stokes-en teorema erabil dezakegu (C kurbak mugaturiko eskualdea R izanik):

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \overrightarrow{rot\left(\vec{F}\right)} \cdot d\vec{S} = \iint_R b \cdot dxdy = b \cdot \text{Azalera}(R) = 2b = 4 \quad \Leftrightarrow \quad b = 2$$