*NOTAS*

Es bien sabido que en el conjunto de los números reales existe una relación de orden "natural": se dice que $x < y$ cuando $y - x$ es un número positivo. Con esta relación, el conjunto está "totalmente ordenado", es decir si $x \neq y$, entonces, o bien $x < y$, o bien $y < x$.
En esta lección comentaremos algunas desigualdades "famosas": aquellas que se establecen entre los distintos promedios de un conjunto de números reales. Con ellas intentaremos resolver los problemas que se proponen después.

Dado un conjunto arbitrario de $n$ números positivos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, se pueden definir varios "promedios". Los más comunes son los siguientes:

- Media aritmética: $MA = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.
- Media geométrica: $MG = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$.
- Media armónica: $MH = \dfrac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + \cdots + 1/x_n}$.
- Media cuadrática: $MC = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$.

En este momento, es natural preguntarse:

1. ¿Qué es un promedio?
2. ¿Por qué existen varios promedios?

A grandes rasgos, un promedio es una cantidad que representa la escala de valores de un grupo de números. Las características básicas de un promedio son la homogeneidad (no puede variar bajo un cambio en la escala de medida) y que su valor debe estar comprendido entre el máximo y el mínimo de las cantidades que representa.
Por otra parte, no todos los promedios representan con la misma fiabilidad el mismo conjunto de números. Dependiendo del caso, es más conveniente uno que otro.

Entre los distintos promedios se pueden establecer las siguientes relaciones generales:

$$\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \leq MH \leq MG \leq MA \leq MC \leq \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Vamos a demostrar la desigualdad $MG \leq MA$, para lo cual distinguiremos dos casos:

1) El caso $n = 2^k$, para todos los valores de $k$, lo demostraremos por inducción.

En primer lugar, si $k = 1$, tenemos que demostrar que $\sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Para ello partimos de la desigualdad evidente $0 \leq (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2$ y desarrollamos. Así pues,

$$0 \leq x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 \cdot x_2} \Longrightarrow \sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Supondremos a continuación que la desigualdad es cierta para cualquier valor de $k$, es decir

$$\sqrt[2^k]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{2^k}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^k}}{2^k}$$

y veamos que también lo es para $k + 1$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^k}}{2^{k+1}} + \frac{x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \dots + x_{2^k+2^k}}{2^{k+1}} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^k}}{2^k} + \frac{x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \dots + x_{2^k+2^k}}{2^k}\right].\end{aligned}$$

Aplicamos la hipótesis de inducción a los dos sumandos. Así obtenemos:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2}\left[\left(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{2^k}\right)^{1/2^k} + \left(x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \dots + x_{2^k+2^k}\right)^{1/2^k}\right].$$

Esta última expresión corresponde a la media aritmética de dos términos. Como en este caso se sabe que es mayor o igual que la media geométrica de dichos términos, resulta en definitiva que

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} &\geq \sqrt{\left(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{2^k}\right)^{(1/2^k)} \cdot \left(x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \dots + x_{2^k+2^k}\right)^{(1/2^k)}} \\ &= \left(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{2^{k+1}}\right)^{1/2^{k+1}}.\end{aligned}$$

2) Para demostrar el caso general, procedemos del siguiente modo:

Sea $N = 2^k + m$, con $0 < m < 2^k$. A partir de la desigualdad (ya probada)

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \geq \left(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{2^{k+1}}\right)^{1/2^{k+1}},$$

sustituimos $x_i$ por $(x_1 + x_2 + \dots + x_N)/N$, para $i = N + 1, \dots, 2^{k+1}$. Obtenemos entonces:

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_N+(2^{k+1}-N)\cdot(x_1+x_2+\dots+x_N)/N}{2^{k+1}}$$
$$\geq \left(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_N\right)^{1/2^{k+1}} \cdot \frac{x_1+x_2+\dots+x_N}{N}^{\frac{2^{k+1}-N}{2^{k+1}}}.$$

Agrupando términos y simplificando, llegamos a la desigualdad buscada

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \geq \left(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_N\right)^{1/N}.$$

Otras desigualdades muy útiles en variedad de problemas son las siguientes:

**Desigualdad de Cauchy-Schwarz.**
Dados dos conjuntos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, se verifica que

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

Para demostrar esta desigualdad, consideramos la desigualdad (evidente)

$$(x_1 - \lambda y_1)^2 + (x_2 - \lambda y_2)^2 + \cdots + (x_n - \lambda y_n)^2 \geq 0,$$

donde $\lambda$ es un parámetro real. Desarrollando la expresión anterior y agrupando términos, obtenemos:

$$(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)\lambda^2 - 2\lambda(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) + (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geq 0.$$

Para que el polinomio cuadrático sea siempre mayor o igual que cero, necesariamente el discriminante debe ser menor o igual que cero. Esto nos conduce directamente a la desigualdad deseada.
Por cierto, a partir de esta desigualdad, es muy fácil probar que la media aritmética es siempre menor o igual a la media cuadrática. ¿Se te ocurre cómo probarlo?

**Desigualdad de Bernouilli.**
Sea $a$ un número real arbitrario. Entonces,
(a) Si $0 < a < 1$, entonces $(1 + x)^a \leq 1 + ax$, para todo $x$ mayor o igual que uno.
(b) Si $a < 0$ ó $a > 1$, entonces $(1 + x)^a \geq 1 + ax$, para todo $x$ mayor que uno.

Algunos de los problemas siguientes requieren conocer algunas de las desigualdades anteriores pero otros se resuelven sin necesidad de ellas. Bastarán conocimientos más generales o deducciones más simples.

1. *Sean* $a_1, \ldots, a_n$ *números positivos.*

   *(a) Probar que, si* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, *entonces* $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 1/n$.

   *(b) Probar que, si* $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = 1$, *entonces* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$.

   **Sol.** La primera parte es consecuencia inmediata de la desigualdad de Cauchy-Schwarz (haciendo $y_k = 1$, para todo $k$) y la segunda se deduce directamente de la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica.

2. *Dado el conjunto* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *de números positivos, probar que*

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

   **Sol.** La respuesta es inmediata si aplicamos la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica.

3. *Sean* $a, b, c$ *tres números positivos tales que* $abc = 1$. *Probar que* $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8$.

   **Sol.** La desigualdad que queremos probar es equivalente a

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c+a}{2} \geq 1.$$

   Debido a la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, sabemos que
$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \ \sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}, \ \sqrt{ca} \leq \frac{c+a}{2}.$$
   Multiplicando miembro a miembro las tres desigualdades, se obtiene la desigualdad deseada.

4. (Fase Local, 2007) *Hallar todas las soluciones reales de la ecuación*

$$3^{x^2-x-y} + 3^{y^2-y-z} + 3^{z^2-z-x} = 1.$$

   **Sol.** Aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, tenemos:

$$3^{x^2-x-y}+3^{y^2-y-z}+3^{z^2-z-x} \geq 3\sqrt[3]{3^{x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z}} = 3^{((x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2)/3} \geq 3^0 = 1.$$

   La igualdad se cumple cuando $x = y = z = 1$.

5. *(a) Probar que, en todo triángulo,* $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$.

   *(b) Probar que, si* $\alpha, \beta, \gamma$ *son agudos,* $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma \geq 3\sqrt{3}$ *y la igualdad se alcanza cuando el triángulo es equilátero.*

   **Sol.** (a)

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma \quad &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\gamma + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha\cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma\cos\alpha\cos\beta = \\ &\Longleftrightarrow \quad \cos\gamma\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = -\operatorname{sen}\gamma\cos(\alpha+\beta) \Longleftrightarrow \cos\gamma\operatorname{sen}\gamma\end{aligned}$$

   (b) Por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica,

$$\frac{A+B+C}{3} = \frac{ABC}{3} \geq \sqrt[3]{ABC} \Longrightarrow (ABC)^{2/3} \geq 3.$$

6. *Sea* $n$ *un número natural mayor que* 1*. Probar que* $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

   **Sol.** Reescribimos la desigualdad a probar de la siguiente forma:

$$\sqrt[n]{n(n-1)\dots 2\cdot 1} < \frac{n+1}{2}.$$

   El primer miembro de la desigualdad sugiere utilizar la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica. Tenemos entonces:

$$\sqrt[n]{n(n-1)\dots 2\cdot 1} < \frac{n+(n-1)+\dots+2+1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

7. *Sean* $x, y, z$ *tres números reales tales que* $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$*. Probar que* $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3/4$.

   **Sol.** Supondremos que todos los números son distintos de cero (caso contrario, el resultado es evidente).
   Llamaremos, para simplificar la notación, $M = x^2 + y^2 + z^2$. Por hipótesis, $xyz = \dfrac{1-M}{2}$. Además, si aplicamos la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica a los números positivos $x^2$, $y^2$, $z^2$, tenemos que $\dfrac{M}{3} \geq (xyz)^{2/3}$. De las dos condiciones, resulta que

$$\frac{M}{3} \geq \left(\frac{1-M}{2}\right)^{2/3}.$$

   De aquí deducimos que $4M^3 - 27M^2 + 54M - 27 \geq 0$.
   Se puede comprobar (por métodos de cálculo diferencial) que este polinomio de tercer grado toma valores negativos cuando $M < 3/4$ y positivos cuando $M > 3/4$, lo que demuestra el enunciado.

8. *Sean $x, y, z$ tres números reales tales que $x+y+z = 6$. Probar que $x^2+y^2+z^2 \geq 12$.*

**Sol.** Aplicaremos la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los conjuntos $\{x, y, z\}$, $\{1, 1, 1\}$. Se obtiene:

$$x + y + z \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Utilizando la hipótesis dada, se llega fácilmente a la conclusión pedida.
Observar que el mismo resultado se obtiene si se aplica directamente la desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática.

9. (Fase Nacional, 2007) *Sea $a \neq 1$ un número real positivo y $n$ un entero positivo. Demostrar que $n^2 < \dfrac{a^n + a^{-n} - 2}{a + a^{-1} - 2}$.*

**Sol.** La desigualdad es equivalente a $n^2 < \dfrac{(a^{n/2} - a^{-n/2})^2}{(a^{1/2} - a^{-1/2})^2}$ o bien $n < \frac{\alpha^n - \alpha^{-n}}{\alpha - \alpha^{-1}}$, con $\alpha = \sqrt{a}$. Por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica,

$$\frac{\alpha^n - \alpha^{-n}}{\alpha - \alpha^{-1}} = \alpha^{1-n}\frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1} = \alpha^{1-n}(1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2n-2}) > \alpha^{1-n} \cdot n\sqrt[n]{\alpha^{2+4+\cdots+(2n-2)}} = n.$$

Los problemas que vienen a continuación, también relativos a desigualdades numéricas, necesitan otras técnicas diferentes y no precisan conocer las fórmulas anteriores.

10. (Fase Local, 1997) *Si $a, b, c$ son números reales positivos, demostrar la desigualdad*

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 3(a - b)(b - c).$$

*¿Cuándo se verifica la igualdad?*

**Sol.** Desarrollamos el producto del segundo miembro y agrupamos términos. Resulta la desigualdad equivalente

$$a^2 + 4b^2 + c^2 - 4ab - 4bc + 2ac \geq 0.$$

Es fácil ver ahora que el primer miembro es igual a $\big(2b - (a + c)\big)^2$, que es evidentemente mayor o igual que cero. Además la igualdad será cierta cuando $2b = a + c$.

11. (Fase Local, 2005) *Sean $x, y, z$ números reales positivos.*

*(a) Si $x + y + z \geq 3$, ¿se verifica necesariamente que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \leq 3$?.*

*(b) Si $x + y + z \leq 3$, ¿se verifica necesariamente que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \geq 3$?.*

*Con la misma idea, probar que $(a_1 + \cdots + a_n) \cdot (1/a_1 + \cdots + 1/a_n) \geq n^2$.*

**Sol.** La primera parte es falsa, como muestra el siguiente ejemplo:

$$x = 0{,}01, y = 2, z = 2.$$

La segunda parte es cierta pues, si hacemos el producto

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = 3 + \frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z},$$

y tenemos en cuenta que la suma de un número positivo más su recíproco es siempre mayor o igual a dos, resulta que

$$3\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9,$$

de donde se deduce la desigualdad propuesta.

12. (Fase Iberoamericana, 1988) *Sean $a, b, c, d, p, q$ enteros positivos tales que $ad-bc = 1$ y $a/b > p/q > c/d$. Probar que $q \geq b+d$ y que, si $q = b+d$, entonces $p = a+c$.*

    **Sol.** De $p/q > c/d$ se deduce que $pd > cq$; entonces $pd \geq cq+1$, y $p/q \geq c/d+1/(qd)$. Análogamente, $a/b > p/q$ implica que $a/b \geq p/q + 1/(bq)$. Así,

    $$\frac{a}{b}-\frac{c}{d} \geq \frac{1}{qd}+\frac{1}{qb} = \frac{b+d}{qbd},$$

    de donde $a/b - c/d = 1/bd$ y $q \geq b+d$.
    Supongamos ahora que $q = b+d$. Tenemos $ad - bc = 1led$, de donde $ad+cd-d \leq bc+cd$ y $(a+c-1)/(b+d) \leq c/d$. Por tanto, $p \geq a+c$. También $ad-bc \leq b$, o bien $bc+b+ab \geq ad+ab$, con lo que $(a+c+1)/(b+d) \geq a/b$. Entonces $p \leq a+c$, es decir $p = a+c$.

13. (Fase Nacional, 1989) *Probar las desigualdades*

    $$\frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot 99}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 100} < \frac{1}{10}.$$

    **Sol.** Escribimos el término central como

    $$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{99}{100}.$$

    Teniendo en cuenta que

    $$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}<\ldots<\frac{98}{99}<\frac{99}{100}<1,$$

    entonces

    $$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{98}{99}\cdot\frac{99}{100} < \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{99}{100}\right)^2 < \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{99}{100}\cdot 1.$$

    Simplificando lo anterior y sacando raíces cuadradas, se obtiene el resultado pedido.

14. *Dado un número natural arbitrario $n$, demostrar que*

$$1,1 \cdot 1,01 \cdot 1,001 \cdot \cdots \cdot \left(1+\frac{1}{10^n}\right) < \frac{9}{8}.$$

**Sol.** Haremos la demostración en varias etapas. En primer lugar, debido a la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, tenemos:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{10}\right) &\cdot\left(1+\tfrac{1}{10^2}\right)\cdot \cdots \cdot \left(1+\tfrac{1}{10^n}\right)\\ &< \left[\tfrac{n+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^n}}{n}\right]^n = \left[1+\tfrac{1}{n}\cdot\tfrac{10^n-1}{9\cdot 10^n}\right]^n.\end{aligned}$$

Como la sucesión $\dfrac{10^n-1}{9\cdot 10^n}$ es creciente y tiene límite $1/9$, deducimos que

$$\left[1+\frac{1}{n}\cdot\frac{10^n-1}{9\cdot 10^n}\right]^n < \left(1+\frac{1}{9n}\right)^n.$$

Para llegar al resultado propuesto, basta ahora probar que la última expresión es menor que $9/8$. Es sabido que la sucesión $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ es creciente y tiene límite $e$, con lo que

$$\left(1+\frac{1}{9n}\right)^n < e^{1/9},$$

de modo que basta probar que $e^{1/9} < 9/8$.
Para ello observamos que la sucesión $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ tiene límite $e$. Veamos que, además, es decreciente.
En efecto, si aplicamos la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica a la sucesión (de $n+2$ elementos) $\left\{1, \dfrac{n}{n+1}, \dfrac{n}{n+1}, \dots, \dfrac{n}{n+1}\right\}$, obtenemos:

$$\frac{n+1}{n+2} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n+2}},$$

o bien

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1},$$

lo que indica que la sucesión $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ es decreciente.
En particular, si hacemos $n=8$, resulta que $e < (9/8)^9$, como queríamos probar.

**Solución alternativa.** Para la segunda parte de la demostración, si aplicamos la fórmula del binomio de Newton a la expresión $\left(1+\dfrac{1}{9n}\right)^n$, resulta:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{9n}\right)^n &= 1+n\cdot\tfrac{1}{9n}+\tbinom{n}{2}\left(\tfrac{1}{9n}\right)^2+\cdots+\left(\tfrac{1}{9n}\right)^n\\ &= 1+\tfrac{1}{9}+\tfrac{n-1}{n}\cdot\tfrac{1}{2!\cdot 9^2}+\cdots+\tfrac{(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}{n^{n-1}}\cdot\tfrac{1}{n!\cdot 9^n}\\ &< 1+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{9^2}+\cdots+\tfrac{1}{9^n} < 1+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{9^2}+\cdots = \tfrac{1}{1-1/9} = \tfrac{9}{8}.\end{aligned}$$