

Existen numerosos resultados sobre la geometría de los triángulos (que de hecho incluye toda la trigonometría). Aquí nos limitaremos a recordar los más básicos.

Cuando se trata con triángulos es habitual el convenio de denotar con letras mayúsculas los vértices y los ángulos (la misma letra para el vértice y el correspondiente ángulo). Para indicar un lado (o lo que mide) se usa la misma letra que la del ángulo opuesto pero escrita en minúscula.

El primer resultado fundamental sobre triángulos es el siguiente:

- (i) Los tres ángulos de un triángulo siempre suman 180° .

Dos conceptos importantes son los de *triángulos semejantes* y *triángulos congruentes*. Se habla de triángulos semejantes cuando tienen los mismos ángulos y de triángulos congruentes cuando, además de tener los mismos ángulos, también tienen los mismos lados. En otras palabras, triángulos congruentes tienen la misma forma y tamaño (coinciden cuando se superponen), sin embargo triángulos semejantes sólo tienen la misma forma.

- (ii) Dos triángulos semejantes tienen los lados proporcionales, más precisamente si en dos triángulos ABC y $A'B'C'$ se dan las igualdades entre ángulos $A = A'$, $B = B'$ y $C = C'$, entonces se dan las siguientes relaciones de proporcionalidad entre sus lados:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

(Recordar el convenio para la notación de ángulos y lados). De este resultado se sigue fácilmente el Teorema de Thales: si dos semirectas que parten de un punto común O se cortan con un cierto número de rectas paralelas, los segmentos en que quedan divididas son proporcionales.

Sabemos que el área de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura, por tanto dos triángulos en los que las bases y alturas midan lo mismo tienen la misma área. Este sencillo principio proporciona el siguiente resultado que a veces es muy útil (si no, véase la demostración del Teorema de Pitágoras que se da en la página web).

- (iii) Si en un triángulo ABC desplazamos el vértice C paralelamente al lado AB , el área de los triángulos que resultan permanece constante.

Los ángulos y lados de un triángulo están relacionados. La situación más simple se da cuando el triángulo es rectángulo.

- (iv) Teorema de Pitágoras: En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos coincide con el cuadrado de la hipotenusa, es decir, si el triángulo ABC es rectángulo en A ($A = 90^\circ$), entonces $a^2 = b^2 + c^2$.

Para triángulos no rectángulos las relaciones son más complicadas:

- (v) Teorema del coseno: En un triángulo ABC se tiene la igualdad

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

(Observar que cuando $A = 90^\circ$ se obtiene justamente el Teorema de Pitágoras.)

Teorema del seno: En cualquier triángulo ABC se cumple que

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

PROBLEMAS

1. A 14 m. de la orilla de un río hay un muro con un agujero a mitad de altura. En un cierto momento del día la sombra del muro alcanza exactamente a la otra orilla del río y, en ese momento, la luz que pasa por el agujero se proyecta en el suelo a 10 m. de la base del muro. ¿A qué distancia se proyectará dicha luz cuando la sombra del muro retroceda hasta el centro del río?

2. Se consideran los cuadriláteros con diagonales perpendiculares de una cierta medida. Demostrar sin escribir ninguna fórmula que todos ellos tienen la misma área.

3. (i) Dos paralelogramos tienen un lado común y los lados paralelos a éste están sobre la misma recta. ¿Qué se puede decir de las áreas de estos paralelogramos?

(ii) Dos paralelogramos $ABCD$ y $AXYZ$ tienen un vértice común A . Además, los puntos X y D están, respectivamente, sobre los lados BC e YZ . Demostrar que ambos tienen la misma área.

4. En el triángulo ABC , X es un punto del lado AB e Y es un punto del lado BC de forma que el segmento XY es paralelo al lado AC . Sea P el punto de corte de los segmentos XC e YA y Q el punto sobre BC tal que PQ es paralelo a AC . Calcular cuánto mide el lado BC si los segmentos YQ y QC miden 1 y 2 unidades, respectivamente.

5. En el triángulo ABC sea P el punto medio del lado BC y Q el punto sobre AC que dista de C la mitad que de A . Sea X el punto en el que se cortan los segmentos QB y AP . Encontrar la razón de las áreas de los triángulos ABC y AXB .

6. Sea P el baricentro de un triángulo ABC . Encontrar la razón entre las alturas de los triángulos ABC y APC por B y P , respectivamente.

7. Si en un triángulo un segmento es a la vez mediana y bisectriz o mediana y altura o bisectriz y altura, ¿cómo es el triángulo? (Demostrarlo) ¿Cómo es un triángulo si un

punto es a la vez baricentro e incentro o baricentro y ortocentro o incentro y ortocentro? (Demostrarlo)

8*. Sea ABC un triángulo y C' el pie de la altura por el vértice C (esto es, C' es la intersección de la altura por C con el lado AB). Sea P el punto de corte de la paralela a AC por C' con la mediatriz del segmento CC' . Demostrar que el segmento PC mide la mitad que el lado AC .

El siguiente problema es una propiedad de gran utilidad cuando se trata con bisectrices en triángulos.

9*. En el triángulo ABC , P es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo A con el lado opuesto BC . Demostrar que

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

10*. Sea ABC un triángulo rectángulo en C , P el punto de corte de la bisectriz en A y el lado BC y Q el punto de corte de la bisectriz en B y el lado AC . Sean M y N los pies de las perpendiculares a AB por P y por Q , respectivamente. Hallar el ángulo NCM .

Los problemas que siguen se han propuesto en olimpiadas recientes.

11*. Se considera un triángulo ABC donde el ángulo en A es 45° y el ángulo en C es 30° . Si M es el punto medio del lado BC , se pide demostrar que el ángulo AMB es 45° y que $BC \cdot AC = 2 \cdot AM \cdot AB$. (Fase local, 2005)

12*. En el triángulo ABC , de área 100, M es el punto medio del lado AC y P es un punto del lado AB tal que el triángulo AMP tiene área 36. La paralela a PM trazada por B corta al lado AC en Q . Hallar el área del triángulo MPQ . (Fase local, 1998.)

13. Sea P un punto del lado BC de un triángulo ABC . La paralela por P a AB corta al lado AC en el punto Q y la paralela por P a AC corta al lado AB en el punto R . La razón entre las áreas de los triángulos RBP y QPC es k^2 . Determinése la razón entre las áreas de los triángulos ARQ y ABC . (Fase local, 2000.)

14*. ¿Existe algún triángulo en el que las medidas de sus tres lados sean números naturales consecutivos y el ángulo mayor sea el doble que el menor? Si existe, determinad sus medidas. (Fase local, 2004.)

15*. En el triángulo acutángulo ABC , AH , AD , y AM son, respectivamente, la altura, la bisectriz y la mediana que parten desde A , estando H , D y M en el lado BC . Si las longitudes de AB , AC y MD son, respectivamente, 11, 8 y 1, calcula la longitud del segmento DH . (Fase local, 2002.)

16. En el triángulo ABC , la bisectriz trazada desde A divide al lado opuesto en dos segmentos, de los que conocemos uno: $BT = 572$ m. Si dicha bisectriz corta a la mediana BM en los segmentos $BD = 200$ m. y $DM = 350$ m., calcula el lado a de dicho triángulo y plantea una ecuación con incógnita c para obtener el lado c (no hace falta que lo calcules explícitamente). (Fase local, 2002.)

17. Se da un triángulo rectángulo isósceles ABC , con el ángulo recto en C , y los catetos de longitud 2. Un arco de círculo l con centro A divide al triángulo en dos partes de la misma área, mientras que el arco de círculo m con centro en B es tangente al arco l en un punto de la hipotenusa AB . Hallar el área de la porción del triángulo no cubierta por los sectores circulares correspondientes a los dos arcos. (Fase local, 2006)

18. En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior CD . Se sabe que el centro del círculo inscrito en el triángulo BCD coincide con el centro del círculo circunscrito del triángulo ABC . Calcular los ángulos del triángulo ABC . (Fase local, 2006)

19. Las diagonales AC y BD de un cuadrilátero convexo $ABCD$ se cortan en E . Denotamos por S_1 , S_2 y S a las áreas de los triángulos ABE , CDE y del cuadrilátero $ABCD$, respectivamente. Probar que $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \leq \sqrt{S}$. ¿Cuándo se da la igualdad? (Fase nacional, 2006)

20. Sea ABC un triángulo y D , E y F puntos situados en los segmentos AC , BA y CB , respectivamente, de forma que los segmentos AF , BD y CE concurren en un punto P interior al triángulo. Sabemos que $BP = 6$, $PD = 6$, $PC = 9$, $PE = 3$ y $AF = 20$. Hallar el área del triángulo ABC . (Fase local, 2007)

21. Tenemos dos rectángulos iguales $ABCD$ y $A'B'C'D'$ de lados $AB = x$ y $BC = y$, $x < y$. Se hace un corte central de longitud x en el primero, paralelo a los lados mayores, por el que se inserta el segundo perpendicularmente hasta que queda centrado. Hallar la razón y/x para que el triángulo ABA' sea equilátero. (Se supone que el lado $A'D'$ es el más próximo a AB .)

* Hay ayudas en la página web.