

NOTAS

Un sencillo principio matemático que da mucho más juego del que parece a primera vista es la simple distinción entre los números pares e impares. Conviene tener presente las siguientes propiedades, todas ellas muy fáciles de demostrar:

- (i) Los números pares e impares se van alternando así que, para cualquier número entero n , los números n y $n + 1$ tienen paridades distintas. De forma más general, n y $n + a$ tienen distinta paridad siempre que a sea impar y tienen la misma paridad si a es par.
- (ii) La suma de dos números con la misma paridad es siempre un número par mientras que la suma de dos números de distinta paridad es siempre impar.
- (iii) El producto de dos números en el que al menos uno de ellos es par siempre es par; el producto de dos números impares es impar.

PROBLEMAS

Los tres primeros problemas son una aplicación bastante directa de las ideas anteriores.

1. En una reunión de 25 personas. ¿Puede ser que cada una se salude dándose la mano con todas las demás excepto con una?
2. En una fiesta hay 2006 invitados repartidos en cuatro habitaciones. Demostrar que siempre es posible juntar a los invitados de la primera habitación con los de otra para que ninguno se quede sin pareja de baile.
3. Un campo de batalla está dividido en 64 sectores mediante una cuadrícula 8×8 . El objetivo del ejército atacante está escondido en uno de dichos sectores y para llegar a él lanza en paracaídas a sus soldados. Se supone que el sector al que cae un paracaidista es completamente aleatorio y que dos paracaidistas nunca caen en el mismo sector. Una vez en tierra los soldados se mueven avanzando en cualquier dirección dos sectores cada vez (no se pueden parar en los sectores adyacentes al que ocupen en determinado momento). ¿Cuál es el mínimo número de soldados que hay que lanzar para estar seguros de que se va a encontrar el objetivo? ¿Cambia algo si el mando del ejército puede elegir el sector en que cae cada paracaidista?

En los dos problemas que siguen el principio de paridad está un poco más escondido.

4. En un tablero formado por una fila con 2006 casillas hay una ficha en la primera casilla y otra en la última. Las fichas tienen una cara blanca y la otra negra presentando la primera su cara blanca y la última la negra. Las fichas se pueden mover de casilla en casilla en cualquier dirección pero cada vez que pasan de un casilla a otra contigua se les da la vuelta.

Además, en una casilla sólo pueden coincidir las dos fichas si presentan colores distintos. ¿Es posible llevar la primera ficha al último lugar y la segunda ficha al primero?

5. ¿Es posible colocar 31 fichas de dominó formando un cuadrado al que le falten dos pequeñas esquinas en la primera fila a la izquierda y en la última a la derecha?

El papel de la paridad en este problema es más claro.

6. Se dan 13 puntos en el plano P_1, \dots, P_{13} y se trazan los segmentos $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{12}P_{13}, P_{13}P_1$. ¿Es posible dibujar una recta que corte a todos estos segmentos por su interior (no se permite que el corte esté en un extremo)?

En el siguiente problema se usan las propiedades (ii) y (iii) enunciadas al principio.

7. Sean a_1, \dots, a_{2007} los primeros 2007 números naturales escritos en un cierto orden. Demostrar que el número

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \dots (a_{2007} - 2007)$$

es par.

En los cuatro problemas siguientes puede que no se vea tan claro dónde está el principio de paridad.

8. ¿Es posible que una hormiga recorra todas las aristas de un cubo sin pasar dos veces por la misma arista?

9. A continuación se muestra un grabado de la ciudad de Königsberg (actual Kaliningrado) donde se ha destacado el curso del río y los siete puentes que lo atravesaban. Se dice que uno de los pasatiempos de los vecinos de esta ciudad era dar un paseo intentando atravesar todos los puentes exactamente una vez pero que nadie fue capaz de hacerlo nunca. Explicar por qué. (Este es el famoso problema de los puentes de Königsberg resuelto por el matemático L. Euler.)

10. El dibujo que aparece abajo representa parte de un laberinto. ¿Es posible ir de uno de los puntos marcados al otro? (naturalmente, no se permite atravesar las paredes del laberinto).

11*. Se colocan boca abajo 40 cartas formando 5 filas con 8 cartas cada una. Dos jugadores realizan por turnos la siguiente jugada: eligen una fila que no tenga todas sus cartas boca arriba y dan la vuelta a una carta que esté boca abajo; con cada una de las cartas de dicha fila que están a continuación pueden hacer lo que quieran: dejarlas como están o voltearlas. Pierde el juego el primer jugador que no pueda hacer ningún movimiento (por encontrarse todas las cartas boca arriba). Demostrar que el jugador que hace la primera jugada puede arreglárselas para ganar siempre, haga lo que haga su contrincante.

12. El solitario es un conocido juego de mesa que se juega en un tablero como el que se muestra a continuación.

Inicialmente todas las casillas salvo la central están ocupadas por una ficha. Una ficha puede saltar sobre otra (en horizontal o vertical) para caer en una casilla libre y la ficha sobre la que salta se retira del tablero. El objetivo del juego es dejar una única ficha en la casilla central. Demostrar que en realidad si somos capaces de dejar una única ficha en el tablero, ésta queda necesariamente en la casilla central o en una de las cuatro casillas

señaladas en el dibujo. (Ayuda. Etiquetar cada casilla con uno de los valores 0 ó 1 de forma que tres casillas cualesquiera seguidas vertical u horizontalmente contengan dos unos y un cero. Si en un momento dado del juego hay por ejemplo 7 casillas etiquetadas con 1 ocupadas por peones, ¿cuántas casillas de este tipo pueden seguir ocupadas después de una jugada? ¿Y después de una segunda jugada?)

Los siguientes dos problemas son de la olimpiada de 2004, el primero de la fase local y el segundo de la nacional.

13*. En un tablero de damas (8×8) colocamos las 24 fichas del juego de modo que llenen las tres filas de arriba. Podemos cambiar la posición de las fichas según el siguiente criterio: una ficha puede saltar por encima de otra a un hueco libre, ya sea en horizontal (a izquierda o derecha), en vertical (arriba o abajo) o en diagonal. ¿Podemos colocar las fichas en las tres filas de abajo?

14*. Colocamos, formando una circunferencia, 2004 fichas bicolores: blancas por una cara y negras por la otra. Un movimiento consiste en elegir una ficha y dar la vuelta a tres fichas: la elegida, la de su derecha y la de su izquierda. Supongamos que inicialmente hay una sola ficha con la cara negra hacia arriba. ¿Será posible, repitiendo el movimiento descrito, conseguir que todas las fichas tengan la cara blanca hacia arriba? ¿Y si tuviéramos 2003 fichas, entre las cuales exactamente una tiene al comienzo la cara negra hacia arriba? (Ayuda. Poner etiquetas a las posiciones de las fichas como en el problema del solitario.)

Este otro problema es de un estilo similar.

15. Se tiene un dispositivo en el que 64 bombillas están montadas formando un cuadrado 8×8 . Cada fila y cada columna de bombillas dispone de un conmutador que cambia el estado de todas las bombillas de esa fila o columna (es decir, enciende las bombillas apagadas y apaga las encendidas). Suponiendo que inicialmente no hay ninguna bombilla encendida, ¿es posible conseguir que quede encendida exactamente una bombilla de todo el cuadro (no importa cuál)? ¿Y que queden encendidas las bombillas de una de las diagonales?

Terminamos con un último problema un tanto sorprendente.

16. En una prisión el carcelero decide dar la oportunidad a los presos de ser liberados jugando con ellos un juego. Les anuncia que al día siguiente los colocará en fila de modo que cada uno sólo podrá ver a los que están delante suyo. Luego les pondrá un gorro, que podrá ser blanco o negro. Naturalmente los presos no pueden ver sus propios gorros. Cuando haya terminado de repartir los gorros cada preso dirá un color, el que quiera; si acierta con el color de su gorro será liberado y si no, permanecerá recluso. Los presos pueden ponerse de acuerdo con antelación en seguir algún tipo de estrategia que les favorezca. Obviamente, el objetivo es conseguir la liberación para el mayor número posible de prisioneros. ¿Qué estrategia deben seguir?

* Hay ayudas en la página web.