

KAPITULU I. SISTEMA LINEALEEN EBAZPENERAKO METODOAK. HASTAPENAK

1. EKUAZIO-SISTEMA LINEALAK

Demagun ondoko ekuazio linealeen sorta,

$$\begin{array}{ccccccc} E_1 : & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ E_n : & a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n. \end{array}$$

non a_{ij} eta b_i ekuazioen koefizienteak eta $x_1, \dots, x_n$ ezezagunak baitira.

Zati honetan sistema linealak askatzeko teknikak aztertuko ditugu. Aurreko n ekuazioak betetzen dituzten $x_1, \dots, x_n$ balioak sistemaren oluzioa da. Bi motako metodoak ikusiko ditugu:

- 1) *Prozesu zehatzak edo teknika zuzenak*: Hau da, sistemaren soluzioa bilatzen dituzten algoritmo finituak (Gauss, Cramer, ...). Askotan metodo hauek emaitza txarra ematen dute biribiltze errorearengatik.
- 2) *Iteraziozko prozesuak*: Hau da, hasierako estimazio batekin sistemaren soluzio hurbil-dua kalkulatzeko dituzten metodo errepikari eta konbergenteak dira (Jacobi, SOR, ...).

Matrizetikiko eragiketetan hiru transformazio onartuko dira:

- 1) Edozein $\lambda \neq 0$ konstantea bider E_i , E_i ekuazioaren ordeztzea $(\lambda E_i) \rightarrow (E_i)$.
- 2) Edozein $\lambda \neq 0$ konstantea bider E_j gehi E_i , E_i ekuazioaren ordeztzea $(\lambda E_j + E_i) \rightarrow (E_i)$.
- 3) E_j eta E_i ekuazioak elkarrekin ordeztzea $(E_i) \rightarrow (E_j)$.

Eragiketa hauei esker sistema bat soluzio berbera dituen beste sistema bihurtuko da.

Sistemaren koefizienteak konstanteak direnez, erosoagoa da matrize hedaturarekin lan egitea,

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \rightarrow A_a = [A, b] = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

2. ALGEBRA LINEALA ETA MATRIZEAK

Atal honetan sistema linealak askatzeko interesgarriak diren algebrako emaitzak azalduko ditugu.

Definizioa

Demagun $A = (a_{ij})$ eta $B = (b_{ij})$ $m \times n$ matrizeak, berauen osagaien batura, $d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, osagaitzat dituen $D = (d_{ij})$ matrizeari $D = A+B$ batura esaten zaio eta $\lambda \in \mathbb{R}$ izanik (λa_{ij}) osagaidun matrizea λA adierazi ohi da. $(-a_{ij})$ osagaiak dituen $-A$ adieraziko dugu.

Teorema

$m \times n$ matrizeen multzoak espazio bektorialaren egitura dauka, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ zenbaki eta A, B eta D $m \times n$ matrizeentzat ondoko propietateak betetzen bait dira:

- | | |
|----------------------------------|---|
| a) $A + B = B + A$, | e) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, |
| b) $(A + B) + D = A + (B + D)$, | f) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, |
| c) $A + 0 = 0 + A = A$, | g) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$, |
| d) $A + (-A) = -A + A = 0$, | h) $1A = A$. |

Definizioa

Bira A $m \times n$ eta B $n \times p$ matrizeak. Ondoko osagaidun matrizea hauen biderkadura matritziala da,

$$E = AB = (e_{ij}) \quad \text{non} \quad e_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad \forall \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p.$$

Definizioa

$d_{ij} = 0 \quad \forall \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n$ osagaitzat dituen $D = (d_{ij})$ $n \times n$ matrizeari "diagonala" da.

I edo $I_n = (\delta_{ij})$ non $\delta_{ii} = 1, \quad \delta_{ij} = 0, i \neq j$ baitira n ordeneko unitate matrizea da.

Teorema

$\lambda \in \mathbb{R}$ zenbakia eta A $n \times m$, B $m \times k$, D $k \times p$ eta E $m \times k$ matritzetarako ondoko propietateak beteko dira:

- a) $A(BD) = (AB)D$
- b) $A(B + E) = AB + AE$
- c) $I_m B = B, B I_k = B$
- d) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Definizioa (Determinantea)

- a) Baldin $A = (a)$ 1×1 matrizea bada orduan $\det(A) = a$.
- b) M_{ij} minorea A $n \times n$ matrizearen $(n-1) \times (n-1)$ azpimatrizearen determinantea da non azpimatrizea eratzeko A matrizeari i . errenkada eta j . zutabea kendu baitdizkiogu.
- d) M_{ij} -ri dagokion biderkagai elkartua $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ da.
- e) A $n \times n$ ($n < 1$) matrizearen determinantea ondoko gisaz kalkulatzeko da ($n!$ biderkaketa):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{edo} \quad \det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad \forall \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Teorema

- a) Baldin edozein zutabe edo errenkadaren osagai guztiak 0 badira, orduan, $\det(A) = 0$.
- b) Baldin A -ren bi errenkada berdinak badira, orduan, $\det(A) = 0$.
- d) Baldin $(E_i) \leftrightarrow (E_j), i \neq j$ errenkada aldatetaz, $\overline{A}$ matrizea A -tik lortzen bada, orduan $\det(\overline{A}) = -\det(A)$. Baldin $\overline{A}$ matrizea $(\lambda E_i) \rightarrow (E_i)$ errenkada aldatetaz lortzen bada, orduan $\det(\overline{A}) = \lambda \cdot \det(A)$.
- g) Baldin A eta B $n \times n$ matrizeak badira, orduan $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Definizioa

Biz A $n \times n$ matrizea, baldin $\exists B$ $n \times n$ non $AB = BA = I$ baita, orduan A matrize "ez singularra" da eta B beronen alderantzizkoa, $A^{-1} = B$. Bestela A "singularra" izango da.

Teorema

A $n \times n$ matrizetarako ondoko baiezpeneak baliokideak dira:

- a) $Ax = 0$ ekuazio sistemak $x = 0$ soluzio bakarra du.
- b) $Ax = b$ sistema linealak edozein b errenkada-bektorerako soluzio bakar bat du.
- c) A matrizea ez singularra da, hau da, A^{-1} existitzen da.
- d) $\det(A) \neq 0$.
- e) Ezabapen Gaussiarraren algoritmoa $Ax = b$ sistemari aplikatu diezaioke.

3. MATRIZE MOTA BEREZIAK

Definizioa

Baldin U $n * n$ matrizearen osagaiek $u_{ij} = 0 \quad \forall i = j + 1, \dots, n$ betetzen badute U -ri matrize goi-triangeluarra esango diogu. Aldiz, baldin L $n * n$ matrizearen osagaiek $l_{ij} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, j - 1$ betetzen badute L -ri matrize behe-triangeluarra esango diogu. Baldin D matrizea aldiberean goi-triangeluarra eta behe-triangeluarra bada, orduan D matrize diagonalak izango da. Adibidez:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$$

Teorema

Baldin $A = (a_{ij})$ $n * n$ matrize triangeluarra (goikoa edo behekoa) edo diagonalak bada orduan,

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Teorema

Baldin $Ax = b$ $n * n$ sistemaren A matrizea ez singularra bada, orduan A matrizea L goi-triangeluarra bider U behe-triangeluarra biderkadura gisaz deskonposa daiteke, hau da: $A = LU$ eta $U = (u_{ij})$, $L = (l_{ij})$.

Definizioa

Izan bedi $A = (a_{ij})$ $n * n$ matrizea, $A^t = (a_{ji})$ $n * n$ matrizeari A matrizearen iraulia esango diogu. Baldin $A^t = A$ bada, orduan A matrize simetrikoa da.

Teorema

Baldin A matrizearen iraulia existitzen bada ondoko propietateak beteko dira:

- 1) $(A^t)^t = A$
- 2) $(A + B)^t = A^t + B^t$
- 3) $(AB)^t = B^t A^t$
- 4) Baldin A^{-1} existitzen bada orduan $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$
- 5) $\det(A^t) = \det(A)$

Definizioa

Izan bitez A matrizea eta $p, q \in \mathbb{N}$ non $1 < p, q < n$ eta $\forall j \geq i + p$ edo $j \leq i - q \Rightarrow a_{ij} = 0$, orduan A -ri banda matrizea esaten zaio eta bere zabalera $p + q + 1$ da. Matrize hauen osagai ez nuluak diagonalaren inguruan daude. Kasu praktikoetan $p = q = 1$ (zabalera = 3) eta $p = q = 2$ (zabalera = 5) agertzen dira. $p = q = 1$ matrizeei tridiagonalak esaten zaie eta ondoko eran agertuko dira:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ d & e & f & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & g & h & i \\ 0 & \dots & 0 & j & k \end{pmatrix}$$

Definizioa

Izan bedi A $n * n$ matrizea, baldin $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad \forall i = 1, \dots, n$ betetzen bada, orduan A -ri hertsiki diagonalak menpekota esaten zaio.

Definizioa

Biz A $n * n$ matrizea, baldin $x^t A x > 0 \quad \forall x > 0$ (non x n dimentsioko bektorea baita) betetzen bada, A -ri matrize positibo definitua esango diogu.

$$x^t A x = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \right)$$

Teorema

Baldin A $n * n$ matrize hertsiki diagonalki menpekoa bada edo positibo definitua bada, orduan A ez singularra da. Gainera $Ax = b$ sistemari aplikatutako ezabapen Gaussiarrak biribiltze-errorearen hazkunde egonkorra dauka.

4. MATRIZE ETA BEKTOREEN NORMAK

Izan bedi $\mathbb{R}^n$ osagai errealekiko bektore-multzoa. Bektorearen normaren kontzeptua sartzeko $\mathbb{R}^n$ multzoan distantzia definitu beharko dugu.

Definizioa

$\mathbb{R}$ multzoan definituriko norma bektoriala, $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$, motako funtzioa da eta ondoko propietateak bete behar ditu:

- 1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- 2) $\|x\| = 0 \iff x = (0, \dots, 0)^t \equiv 0$
- 3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
- 4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Definizioa

Biz $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ bektorea, ondoko l_1 , l_2 , l_∞ norma ohizkoenak dira:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad , \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad , \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Baldin $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ kontsideratzen baditugu l_2 -ri norma euklidearra esaten zaio eta koordenatu jatorritik punturainoko distatzi erreala adierazten du.

Definizioa

Bi bektoreen arteko distantzia beraien kenduraren normatzat definitu ohi da.

Beraz, baldin $x = (x_1, \dots, x_n)^t$, $y = (y_1, \dots, y_n)^t \in \mathbb{R}^n$, orduan:

$$\|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad , \quad \|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad , \quad \|x - y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

Adibidea

Izan bedi ondorengo ekuazio-sistema:

$$\begin{array}{rclcl} E_1 : & 3.3330x_1 & + & 15920x_2 & - & 10.333x_3 & = & 15913 \\ E_2 : & 2.2220x_1 & + & 16.710x_2 & + & 9.6120x_3 & = & 28.544 \\ E_3 : & 1.5611x_1 & + & 5.1791x_2 & + & 1.6852x_3 & = & 8.4254 \end{array}$$

Sistema lineal honen soluzio zuzena $x = (x_1, x_2, x_3)^t = (1.0000, 1.0000, 1.0000)^t$ da, baina sistema honi 5 digitu esangarrietako ezabapen Gaussiarra aplikatu ondoren $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)^t = (1.2001, 0.99991, 0.92538)^t$ soluzio hurbildua agertu zaio.

$$\|x - \bar{x}\|_1 = |1.0000 - 1.2001| + |1.0000 - 0.99991| + |1.0000 - 0.92538| = 0.27481$$

$$\|x - \bar{x}\|_2 = \sqrt{|1.0000 - 1.2001|^2 + |1.0000 - 0.99991|^2 + |1.0000 - 0.92538|^2} = 0.21352$$

$$\|x - \bar{x}\|_\infty = \max\{|1.0000 - 1.2001|, |1.0000 - 0.99991|, |1.0000 - 0.92538|\} = 0.2001$$

Nahiz eta $\bar{x}_2$ eta $\bar{x}_3$ hurbilketa nahiko onak izan $\bar{x}_1$ hurbilketa erabat txarra da eta x eta $\bar{x}$ -en arteko distantzia menperatu du.

Distantziaren kontzeptuaren bidez $\mathbb{R}^n$ espazioaren bektore segideen limitea definituko dugu.

Definizioa

Baldin ondoko erlazioa betetzen bada $\mathbb{R}^n$ espazioaren $\{x^{(k)}\}_{k=1}^n$ bektore segidak, $\|\cdot\|$ normaz, x bektorerara konbergitzen duela esan ohi da.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) \quad \text{non} \quad \forall k \geq N(\epsilon) \quad \|x^{(k)} - x\| < \epsilon \quad \text{betetzen baita}$$

Teorema

$\mathbb{R}^n$ espazioan $\{x^{(k)}\}_{k=1}^n$ bektore segidak x bektorerara $\|\cdot\|$ normaz konbergitzen du baldin eta soilik baldin $\forall i = 1, \dots, n \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i$

$\mathbb{R}^n$ espazioan definituriko norma guztiak baliokideak dira, hau da, baldin $\|\cdot\|$ eta $\|\cdot\|'$ $\mathbb{R}^n$ -ko bi normak badira eta $\|\cdot\|$ normari dagokion $\{x^{(k)}\}_{k=1}^n$ segidaren limitea x bada orduan $\|\cdot\|'$ normari dagokion $\{x^{(k)}\}_{k=1}^n$ segidaren limitea x da ere bai. $n * n$ matrizeen arteko distantzia neurtzeko matrizeen normaren kontzeptua behar da. Adibidez $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$.

Definizioa

Ondoko propietateak betetzen dituzten $n * n$ matrizeen multzoan definituriko $\|\cdot\|$ aplikazioari norma matriziala esaten zaio.

- 1) $\|A\| \geq 0 \quad \forall A \ n * n \text{ matricea}$
- 2) $\|A\| = 0 \iff A = 0 \quad \forall A \ n * n \text{ matricea}$
- 3) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ A \ n * n \text{ matricea}$
- 4) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, \ B \ n * n \text{ matriceak}$
- 5) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad \forall A, \ B \ n * n \text{ matriceak}$

Orain l_1, l_2, l_∞ normak ondorioztatzen dituzten matrizeen normak kontsideratuko ditugu. Bira A eta $B \ n * n$ matriceak, $\|A - B\|$ beraien arteko distantziatzat hartuko dugu.

Teorema

Baldin $\|\cdot\|$ $\mathbb{R}^n$ -ko norma bektoriala bada, orduan, $n * n$ matrice errealeen multzoan $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ adierazpenaz norma matriziala ("*norma naturala*") definitu ohi da.

$$l_1 \text{ norma} \longrightarrow \|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1$$

$$l_2 \text{ norma} \longrightarrow \|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

$$l_\infty \text{ norma} \longrightarrow \|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$$

Teorema

$A = (a_{ij})$ $n \times n$ matrizerako, ondoko propietateak beteko dira:

- a) $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$
 b) $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

****frog****

Definizioa

Biz A $n \times n$ matrizea, $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ A -ren "polinomio karakteristikoa" da. $P(\lambda)$ koefiziente errealekiko n . mailako polinomioa da, beraz, gehienez " n " erro desberdin dauzka. Baldin λ $P(\lambda)$ -ren erroa bada, ikusitako teorema baten bidez $\det(A - \lambda I) = 0$ denez $(A - \lambda I)x = 0$ sistemak soluzio nuluaz gain beste soluzio ez nulia dauka.

Definizioa

Biz $P(\lambda)$ A matrizearen polinomio karakteristikoa, $P(\lambda)$ -ren erroei A -ren "autobalioak" edo "balio propioak" esango diegu. Baldin λ A -ren autobalioa bada eta x bektoreak $(A - \lambda I)x = 0$ betetzen badu, orduan x -i λ -ri dagokion A -ren autobektorea esango diogu.

Adibidea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matrizearen autobalioak eta autobektore bat aurkitu.

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda) + (2-\lambda)$$

Beraz, autobalioak $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ dira.

λ_1 -ri dagokion autobektoreak $(A - \lambda_1 I)x = 0$ bete behar du.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Sistema honen soluzioa ondokoa da: $x_1 = x_3 = 0$ eta x_2 hautazkoa. Adibidez, $x = (0, 1, 0)^t$

Definizioa

Biz A $n \times n$ matrizea eta λ_i bere autobalioak, $\rho(A) = \max\{|\lambda_i|\}$ balioari A -ren "erradio espektrala" esaten zaio.

Teorema

Biz $A = (a_{ij})$ $n \times n$ matrize erreala, orduan:

- a) $[\rho(A^t A)]^{(1/2)} = \|A\|_2$
 b) $\rho(A) \leq \|A\| \quad \forall \|\cdot\|$ norma matriziala.
 c) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \|\cdot\|$ norma non $\|A\| < \rho(A) + \epsilon$

Adibidea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A matrizearen erradio espektrala aurkitu.

$$AA^t = A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det(AA^t - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 & 1 \\ 3 & 3-\lambda & 3 \\ 1 & 3 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)^2(3-\lambda) + 18 - (3-\lambda) - 18(5-\lambda) = -\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$$

A -ren autobalioak 0 , 4 eta 9 dira.

Beraz $\|A\|_2 = [\rho(A^t A)]^{(1/2)} = \sqrt{\max\{0, 4, 9\}} = 3$

Matrizeen iteraziozko prozesuetan, beraien osagaiek 0 -ra konbergitzen duten matrizeak garrantsi hadikoak dira eta hauei matrize konbergenteak esango diegu.

Definizioa

Izan bedi A $n \times n$ matrizea, baldin $\lim_{k \rightarrow \infty} (A^k)_{ij} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n$ betetzen bada, orduan A konbergentea da.

Teorema

A $n \times n$ matrizerako, ondorengo baieztapenak baliokideak dira:

- i) A matrize konbergentea da.
- ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$ edozein $\|\cdot\|$ norma naturalerako.
- iii) $\rho(A) \leq 1$
- iv) $\|A\| \leq 1$
- v) $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

KAPITULU II. EZABAPEN GAUSSIARRA ETA ATZERAKAKO ORDEZKAPENA

1. SARRERA ETA METODOA

Demagun ondoko sistema lineala eta matize hedatua:

$$\begin{array}{l} E_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \longrightarrow A_h = [A, b] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & & a_{1n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & & a_{nn+1} \end{array} \right) \\ E_n : a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

non $a_{in+1} = b_i$, $i = 1, \dots, n$ baitira. Baldin $a_{11} \neq 0$, hurrenez hurren, ondoko aldaketak egin daitezke:

$$\left(E_j - \left(\frac{a_{j1}}{a_{11}} \right) E_1 \right) \longrightarrow (E_j), \quad j = 2, 3, \dots, n$$

beraz a_{11} osagaiaren azpian dauden beste a_{j1} , $j = 2, \dots, n$ osagai guztiak ezabatuko ditugu. Gero beste zutabetan prozesu bera errepikatuko dugu diagonal nagusiaren azpiko osagai guztiak 0 izan arte.

Beraz $a_{ii} \neq 0$ denean:

$$\left(E_j - \left(\frac{a_{ji}}{a_{ii}} \right) E_i \right) \longrightarrow (E_j) \quad j = i + 1, \dots, n$$

aldaketak sartuko ditugu sistema baliokidearen ondoko matrize berria izan arte:

$$A_h^{(f)} = [A, b] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} & a_{nn+1} \end{array} \right)$$

Matrize hau, triangeluarra denez, atzerakako ordezkapenaren bidez zuzenean ebatzi daiteke,

$$\begin{array}{rclcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & a_{1n+1}, \\ & a_{12}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & a_{2n+1}, \\ & & \dots & & \dots \\ & & & a_{nn}x_n & = & a_{nn+1}. \end{array}$$

$$x_n = \frac{a_{nn+1}}{a_{nn}}; \quad x_{n-1} = \frac{(a_{n-1n+1} - a_{n-1n}x_n)}{a_{n-1n-1}}$$

eta jarraian:

$$x_i = \frac{a_{in+1} - a_{in}x_n - a_{in-1}x_{n-1} - \dots - a_{i+1}x_{i+1}}{a_{ii}} = \frac{(a_{in+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j)}{a_{ii}} \quad \forall i = n-1, \dots, 1$$

Prozesu honen beste adierazpidea azal dezakegu. $\{A_h^{(i)}\}_{i=1}^n$ matrizeen segida kontsideratuko dugu non $A_h^{(k)}$ matrizea ezabapenaren k urratseko matrizea baita. Hau da:

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k-1)} & i = 1, \dots, k-1, \quad j = 1, \dots, n+1 \\ 0 & i = k, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k-1 \\ a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik-1}^{(k-1)}}{a_{k-1k-1}^{(k-1)}} a_{k-1j}^{(k-1)} & i = k, \dots, n, \quad j = k, \dots, n+1 \end{cases}$$

$$A_h^{(k)} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1k-1}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & a_{1n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2k-2}^{(2)} & a_{2k}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & a_{2n+1}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{k-1k-1}^{(k-1)} & a_{k-1k}^{(k-1)} & \dots & a_{k-1n}^{(k-1)} & a_{k-1n+1}^{(k-1)} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} & a_{kn+1}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} & a_{nn+1}^{(k)} \end{array} \right)$$

$A_h^{(k)}$ matrizearen azken $E_k, \dots, E_n$ ekuazioetan x_{k-1} aldagaia ez da azaltzen $x_k, \dots, x_n$ aldagaien menpeko adierazpenaz ordezkatu delako. Hala ere $A_h^{(k)}$ eta A_h baliokideak dira. Baldin $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, \dots$ edo $a_{nn}^{(n)}$ berdin 0 bada orduan prozesua ezin da burutu $(E_i - (a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)})E_k) \longrightarrow (E_i)$ ordezkapenaren zatikiaren izendatzailea 0 baita. Eragozpen hau gaınditzeko prozesua aldatu beharko dugu, baldin $\exists 1 \leq k \leq n-1$ non $a_{kk}^{(k)} = 0$ den, orduan, k zutabea $a_{kk}^{(k)}$ osagaiaren azpian elementu bat $\neq 0$ bilatu beharko dugu, hau da, $k-1 \leq p \leq n$ non $a_{pk}^{(k)} \neq 0$ eta $(E_k \longleftrightarrow (E_p))$ aldaketa burutu. Baldin $a_{pk}^{(k)} = 0 \forall p = k, \dots, n$, orduan sistemak soluzio bat baino gehiago dauka eta prozesua gelditu egingo da.

Adibidea

Ondorengo ekuazio-sistema ebatzi:

$$\begin{cases} E_1 : & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -8, \\ E_2 : & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & -20, \\ E_3 : & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & -2, \\ E_4 : & x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 4. \end{cases}$$

Sistemaren matrize hedatua ondokoa da:

$$A_h = A_h^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} (E_2 - 2E_1) \longrightarrow (E_2) \\ (E_3 - E_1) \longrightarrow (E_3) \\ (E_4 - E_1) \longrightarrow (E_4) \end{array} \right\} \longrightarrow A_h^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array} \right)$$

$a_{22}^{(2)} = 0$ denez errenkada-aldaketarik gabe prozesuak ezin du jarraitu, baina $a_{32}^{(2)} \neq 0$ denez,

$$(E_2) \longleftrightarrow (E_3) \longrightarrow A_h^{(2)'} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array} \right)$$

x_2 ezabatua dagoenez $A_h^{(3)} = A_h^{(2)'}$ eta $A_h^{(4)}$ eraikiko dugu:

$$(E_4 + 2E_3) \longleftrightarrow (E_4) \longrightarrow A_h^{(4)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right).$$

Orain sistemaren soluzioa kalkulatzeko atzerakako ordezkapena dator:

$$x_4 = 4/2 = 2 \quad ; \quad x_3 = \frac{[-4 + x_4]}{-1} = 2 \quad , \quad x_2 = \frac{[6 - x_4 + x_3]}{2} = 3 \quad , \quad x_1 = \frac{[-8 + x_4 - 2x_3 + x_2]}{1} = -7$$

2. ALGORITMOA ETA ADIBIDEAK

Atzerakako ordezkapenarekiko ezabapen Gaussiarraren algoritmoa

Ezabapen Gaussiarraren algoritmoak n ekuazio linealeen sistemaren soluzioa aurkitzen du:

Sarreran: n sistemaren heina; $A_h = (a_{ij})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n+1$ matrize hedatua.

Irteeran: $(x_1, \dots, x_n)$ soluzioa edo soluzio bat baino gehiago daudeneko mezua.

Urrats 1: $i = 1, 2, \dots, n-1$ den bitartean 2-4 urratsak jarraitu.

Urrats 2: Izan bedi $p \leq i \leq p \leq n$ eta $a_{pi} \neq 0$ betetzen duen zenbakirik txikiena. p hori existitzen ez bada, orduan IRTEERA (soluzio bat baino gehiago daude); GELDITU.

Urrats 3: Baldin $p \neq i$ bada egin $(E_p) \longleftrightarrow (E_i)$ errenkadeen aldaketa.

Urrats 4: $j = i+1, i+2, \dots, n$ den bitartean 5-6 urratsak jarraitu.

Urrats 5: Hartu $m_{ji} = a_{ji}/a_{ii}$.

Urrats 6: $(E_j - m_{ji}E_i) \longleftrightarrow (E_j)$

Urrats 7: Baldin $a_{nn} = 0$ bada, IRTEERA (soluzio bat baino gehiago daude); GELDITU.

Atzerakako Ordezkapena

Urrats 8: Hartu $x_n = a_{nn+1}/a_{nn}$

Urrats 9: $i = n-1, n-2, \dots, 1$ den bitartean hartu $x_i = (a_{in+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j)/a_{ii}$

Urrats 10: IRTEERA $(x_1, \dots, x_n)$; (prozesu asebetegarria) GELDITU.

Adibidea

Ondoko bi sistema linealak ebatzi:

$$\begin{array}{cccc|cccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 8 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = & 10 \\ -x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{cccc|cccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = & 10 \\ -x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Sistema hauen matrize hedatuak ondokoak dira:

$$A_{a(1)}^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 10 \\ -1 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad \left| \quad A_{a(2)}^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 10 \\ -1 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Bi kasuetan $a_{11} = 1 \neq 0$ denez E_2, E_3 eta E_4 errenkadetan x_1 -en koefizientea ezaba dezakegu:

$$m_{j1} = \frac{a_{j1}}{a_{11}} = \frac{a_{j1}}{1} = a_{j1}$$

Orduan $j = 2 \rightarrow m_{21} = 1$; $j = 3 \rightarrow m_{31} = 2$; $j = 4 \rightarrow m_{41} = -1$ eta ondoko eragiketak burutuko ditugu:

$$(E_2 - E_1) \rightarrow (E_2) ; (E_3 - 2E_1) \rightarrow (E_3) ; (E_4 + E_1) \rightarrow (E_4)$$

sistemak lehenengoan baino antza bakunagoa harturik:

$$A_{a(1)}^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 7 \end{array} \right) \quad \left| \quad A_{a(2)}^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

$a_{22} = a_{32} = a_{42} = 0$ direnez prozesua gelditu da, soluzio bat baino gehiago direlarik.

Hala ere, $(E_4 + E_3) \rightarrow (E_4)$ aldaketaren bitartez egoera argiago ikus dezakegu:

$$A_{a(1)}^{(4)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad \left| \quad A_{a(2)}^{(4)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Matrize hauei dagozkien sistemak ondokoak dira:

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & & & x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ & & & & & & x_4 & = & 3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 3 \\ x_3 = -4 + 2x_4 = 2 \\ x_3 = x_4 - 1 = 2 \\ x_1 = 7 - x_2 - 2 - 3 = 2 - x_2 \end{cases}$$

Beraz sistema honen soluzioak $(2-t, t, 2, 3)$ modukoak izango dira, non t parametro askea baita. Beste sistema, aldiz, ez dauka horrelako soluziorik:

$$\begin{array}{rcccccl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ & & & - & x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ & & & & x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ & & & & & & x_4 & = & 3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 3 \\ x_3 = -4 + 2x_4 = 2 \\ x_3 = 2 + x_4 = 5 \\ x_1 = 2 - x_2 \end{cases}$$

$x_3 = 2$, $x_3 = 5 \Rightarrow 2 = 5$ eta azken emaitza hau absurdua da, beraz, bigarren sistema honek ez dauka soluziorik.

Soluzioaren existentziaz gain beste bi kontzeptuak aztertu behar ditugu. Lehenengoa biribiltze errorea da eta bestea eragiketa kopurua. Digito hamartarrekiko zenbakien arteko biderkadurek digito hamartarrekiko beste zenbakiak emango dituzte. Ordenagailuak digito kopuru mugatua gorde dezake, beraz, baldin koefiziente hurbilduekin lan egin behar badugu, biribiltze erroreaken hazkuntza kontrolatu beharko dugu. Era berean, biderkadura edo zatidura bat prozesatzea batura edo kendura baino askoz denbora gehiago irautzen da, horregatik eragiketa kopurua kontrolatu beharko da ere bai. Adibidez, algoritmoaren 1 - 4 urratsetan ez daude eragiketarik baina 5. urratsean $(n-i)$ zatiketak egiten dira; 6. urratsean $(E_j - m_{ji}E_i) \rightarrow (E_j)$ aldaketetan $(n-i)(n-i+1)$ biderkaketa eta $(n-i)(n-i+1)$ kenketa egiten dira. Baldin i bakoitzerako eragiketa kopurua kontsideratzen badugu, algoritmoaren eragiketa kopuru osoa ondorengoa da:

$$\text{Biderkaketa/Zatiketa} \\ \frac{2n^3+3n^2-5n}{6} + \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^3+3n^2-n}{3}$$

$$\text{Batuketa/kenketa} \\ \frac{n^3-n}{3} + \frac{n^2-n}{2} = \frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$$

Biderkaketa/Zatiketa eta Batuketa/Kenketa kopuruak $n^3/3$ ordenekoak direnez, eragiketak eta konputazio-denbora proportzio honekin batera haziko dira.

ARIKETAK

1. Atzerakako ordezkapenarekiko ezabapen Gaussiarraren bidez, ekuazioak berrordenatu gabe eta bi digitoekiko aritmetikaz ondoko sistema linealak ebatzi. Soluzio zuzena: $(x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 3)$.

$$\begin{array}{l} 4x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ a) \quad 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ \quad x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11 \\ b) \quad 4x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \quad 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ c) \quad 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -5 \\ \quad x_1 + x_2 - 3x_3 = -9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -5 \\ d) \quad x_1 + x_2 - 3x_3 = -9 \\ \quad 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \end{array}$$

2. Atzerakako ordezkapenarekiko ezabapen Gaussiarraren bidez eta aritmetika zehatzaz ondoko sistema linealak ebatzi. Baldin beharrezkoak badira errenkada-ordezkapenak herabili.

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ a) \quad 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ \quad x_1 + x_2 = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_2 + 4x_3 = 0 \\ b) \quad x_1 - x_2 - x_3 = 0.375 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 - 1.5x_2 + 3x_3 = 1 \\ c) \quad -x_1 + 2x_3 = 3 \\ \quad 4x_1 - 4.5x_2 + 5x_3 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ d) \quad 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 0 \\ \quad 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4 \end{array}$$

KAPITULU III. PIBOTEO ESTRATEGIAK

1. SARRERA ETA METODOA

Ezabapen Gaussiarraren garapenean $k \leq i \leq p$ urratsean $a_{kk}^{(k)} = 0$ bada eta $a_{pk}^{(k)} \neq 0$, orduan eragozpena gainditzeko $(E_k) \longleftrightarrow (E_p)$ errenkada-aldaketa egingo da. Hala ere nahiz eta diagonaleko osagaiak $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ izan, borobiltze errore nabaria bihurtu daiteke. Baldin diagonal nagusiaren azpian pibote osagaia baino askoz handiagoak diren osagaiak badaude, ordenagailuak errore handia eragin dezake ondoko adibidean ikus dezakegunez.

Adibidea

$$\begin{aligned} E_1 : & 0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \\ E_2 : & 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \end{aligned}$$

Sistema linealaren soluzio zehatza $(x_1 = 10.00, x_2 = 1.000)$ da. Baina lau digito esangarriekiko ezabapen Gaussiarra aplikatzen badiogu:

$$a_{11}^{(1)} = 0.003 \quad , \quad m_{21} = \frac{5.291}{0.003} = 1763.\bar{6} \approx 1764$$

$$(E_2 - m_{21}E_1) \longrightarrow (E_2) \Rightarrow \begin{cases} 1764 \cdot 59.14 = 104322 \longrightarrow 104300 \\ 1764 \cdot 59.17 = 104375 \longrightarrow 104400 \end{cases} \quad \text{eta}$$

$$\begin{aligned} E_1 : & 0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \\ E_2 : & \quad \quad - 104300x_2 = -104400 \end{aligned}$$

sistemaren soluzioa atzerakako ordezkapenaz kalkula daiteke

$$x_2 = 1.001 \quad , \quad x_1 = \frac{59.17 - 59.14 \cdot 1.001}{0.003} = \frac{59.17 - 59.20}{0.003} = -\frac{0.030}{0.003} = -10.00$$

x_2 -ren errore txikiak eragin itzela izan du x_1 -en gainean, aldagai honen errorea 20.000 bider handitua izan baita.

Adibide honek $a_{kk}^{(k)}$ koefizientea $a_{pk}^{(k)}$, $k+1 \leq p \leq n$ baino askoz txikiago deneko kasuaren eragozpenak erakusten ditu. Gehienetan, piboteo estrategiek k eta p errenkadeen arteko trukearen bidez $a_{pk}^{(k)}$ osagai pibote berria eta egokia bilatzen dute. Piboteo estrategiarik bakunena diagonalaren azpian dagoen zutabe bakoitzaren osagiarik handiena (balio absolutuan) aurkitzean datza, $|a_{pk}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|$, eta ondorioz $(E_k) \longleftrightarrow (E_p)$.

Adibidea

$$\begin{aligned} E_1 : & 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \\ E_2 : & 0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \end{aligned}$$

$$\text{Orain } a_{11}^{(1)} = 5.291 \longrightarrow m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{0.003}{5.291}$$

$$(E_2 - m_{21}E_1) \longrightarrow (E_2) \Rightarrow \begin{cases} 0.000567 \cdot 6.13 = 0.003476 \\ 0.000567 \cdot 46.78 = 0.02652 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5.291x_1 - 6.130x_2 &= 46.78 \\ + 59.14x_2 &= 59.14 \end{aligned}$$

Atzerakako ordezkapenaz $(x_1 = 10.00, x_2 = 1.000)$ soluzio zehatza aterako zaigu. Metodo hau zutabe-piboteo maximotzat ezagutu ohi da.

2. ALGORITMOA ETA ADIBIDEAK

Metodo honek eragiketa guztietan $|m_{ij}| \leq 1$ izatea zihurtatzen du.

Zutabe piboteo maximoarekiko ezabapen Gaussiarraren algoritmoa

Algoritmoak ekuazio linealeen sistemaren soluzioa aurkitzen du:

Sarreran: n ekuazio kopurua; $A_h = (a_{ij})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n+1$ matrize hedatua.

Irteeran: $(x_1, \dots, x_n)$ soluzioa edo soluzio bat baino gehiago daudeneko mezua.

Ezabapen Gaussiarra

Urrats 1: Hartu $F(i) = i$, $i = 1, \dots, n$

Urrats 2: $i = 1, 2, \dots, n-1$ den bitartean 3-6 urratsak jarraitu.

Urrats 3: $|a(F(p), i)| = \max_{i \leq j \leq n} |a(F(j), i)|$ adierazpena betetzen duen $i \leq p \leq n$ zenbakirik txikiena hautatu.

Urrats 4: Baldin $|a(F(p), i)| = 0$, IRTEERA (soluzio bat baino gehiago daude); GELDITU.

Urrats 5: Baldin $F(i) \neq F(p)$, orduan $AUX = F(i)$; $F(i) = F(p)$; $F(p) = AUX$.

Urrats 6: $j = i+1, \dots, n$ den bitartean 7-8 urratsak jarraitu.

Urrats 7: Hartu $m(F(j), i) = a(F(j), i)/a(F(i), i)$

Urrats 8: $(E_{F(j)} - m(F(j), i)E_{F(i)}) \longleftrightarrow (E_{F(j)})$.

Urrats 9: Baldin $a(F(n), n) = 0$, IRTEERA (soluzio bat baino gehiago daude); GELDITU.

Atzerakako Ordezkapena

Urrats 10: Hartu $x_n = a(F(n), n+1)/a(F(n), n)$

Urrats 11: $i = n-1, \dots, 1$ bitartean hartu $x_i = (a(F(i), n+1) - \sum_{j=i+1}^n a(F(i), j)x_j) / a(F(i), i)$

Urrats 12: IRTEERA $(x_1, \dots, x_n)$; (prozesu asebetegarria) GELDITU.

Adibidea

Nahiz eta metodo honek sistema gehienetan emaitza onak itzuli, batzuetan ez da nahikoa. Demagun lehenengo adibidearen sistemaren koefizienteak bider 10^4 .

$$\begin{array}{rcl} E_1 : & 30.00x_1 & + \quad 591400x_2 = 591700 \\ E_2 : & 5.291x_1 & - \quad 6.130x_2 = 46.78 \end{array}$$

Orain sistemari zutabe piboteo maximoarekiko ezabapen Gaussiarra aplikatuko diogu 4 digito esangarriekiko aritmetikaz,

$$\max_{1 \leq j \leq 2} |a_{ji}| = 30.00, \quad m_{21} = \frac{5.291}{30.00} = 0.1764$$

$$(E_2 - m_{21}E_1) \longrightarrow (E_2) \Rightarrow \begin{cases} 0.1764 \cdot 591400 = 104322 \longrightarrow 104300 \\ 0.1764 \cdot 591700 = 104375 \longrightarrow 104400 \end{cases} \quad \text{eta}$$

$$\begin{array}{rcl} 30.00x_1 & + & 591400x_2 = 591700 \\ & - & 104300x_2 = -104400 \end{array}$$

sistema baliokide honen soluzioa $(x_1 = -10.00, x_2 = 1.001)$ da.

Gisa honetako sistemetarako teknika egokiena zutabe piboteo eskalatua izeneko da. Prozesu berri honen lehenengo urratsa errenkada bakoitzerako eskala faktore bat definitzean datza.

$$\forall l = 1, \dots, n, \quad s_l = \max_{1 \leq j \leq n} |a_{lj}|$$

Baldin $s_l = 0$, $1 \leq l \leq n$, orduan soluzio bat baino gehiago egon behar du eta prozesua gelditu egiten da. Bestela $|a_{k1}|/s_k = \max_{1 \leq j \leq n} |a_{j1}|/s_j$ betetzen duen $1 \leq k \leq n$ zenbakirik txikiena aukeratuko

dugu. Era berean "i" urratsean $|a_{ki}|/s_k = \max_{i \leq j \leq n} |a_{ji}|/s_j$ betetzen duen $i \leq k \leq n$ zenbakirik txikiena aukeratuko dugu eta $(E_i) \longleftrightarrow (E_j)$ aldaketa egingo dugu ezabapen Gaussiarraren aurretik.

Eskalaren eragina errenkada bakoitzaren osagirik handienaren magnitudea 1 izatean datza, beraz, eskala faktoreen arteko zatidurak ez du biribiltze errorerik sortzen.

Adibidea

Aurreko adibidearen biderkatzaileak ondokoak dira,

$$s_1 = \max\{|30.00|, |591400|\} = 591400, \quad s_2 = \max\{|5.291|, |-6.130|\} = 6.130$$

$$\frac{|a_{11}|}{s_1} = \frac{30.00}{591400} = 0.5073 \cdot 10^{-4} \quad \text{eta} \quad \frac{|a_{21}|}{s_2} = \frac{5.291}{6.130} = 0.8631$$

Orain errenkada-aldaketa burutzen dugu ondoko sistema bihurtuz,

$$\begin{aligned} 5.291x_1 - 6.130x_2 &= 46.78 \\ 30.00x_1 + 591400x_2 &= 591700 \end{aligned}$$

Sistema honi ezabapen Gaussiarra aplikatuko diogu $m_{21} = 30.00/5.291 = 5.67$ biderkatzailearekin,

$$(E_2 - m_{21}E_1) \longrightarrow (E_2) \Rightarrow \begin{cases} 5.67 \cdot 6.13 = 34.76 \\ 5.67 \cdot 46.78 = 256.2 \end{cases} \quad \text{etaorain} \quad \begin{aligned} 5.291x_1 - 6.130x_2 &= 46.78, \\ 591400x_2 &= 591400, \end{aligned}$$

Orain atzerakako ordezkapenak ematen digun soluzioa $(x_1 = 10.00, x_2 = 1.000)$ da.

Zutabe piboteo eskalatuarekiko ezabapen Gaussiarraren algoritmoa

Algoritmoak ekuazio linealeen sistemaren soluzioa aurkitzen du:

Sarreran: n ekuazio kopurua; $A_h = (a_{ij})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n+1$ matrize hedatua.

Irteeran: $(x_1, \dots, x_n)$ soluzioa edo soluzio bat baino gehiago daudeneko mezua.

Ezabapen Gaussiarra

Urrats 1: Hartu $s_i = s(i) = \max_{1 \leq j \leq n} |a(i, j)|$ $i = 1, \dots, n$ Baldin i -rako $s_i = 0$ bada, orduan IRTEERA (soluzio bat baino gehiago daude); GELDITU. Bestela hartu $f(i) = i$

Urrats 2: $i = 1, 2, \dots, n-1$ den bitartean 3-6 urratsak jarraitu.

Urrats 3: $\frac{|a(F(p), i)|}{s(F(p))} = \max_{i \leq j \leq n} \frac{|a(F(j), i)|}{s(F(j))}$ adierazpena betetzen duen $i \leq p \leq n$ zenbakirik txikiena hautatu.

Urrats 4: Baldin $|a(F(p), i)| = 0$, IRTEERA (soluzio bat baino gehiago daude); GELDITU.

Urrats 5: Baldin $F(i) \neq F(p)$, orduan $AUX = F(i)$; $F(i) = F(p)$; $F(p) = AUX$.

Urrats 6: $j = i + 1, \dots, n$ den bitartean 7-8 urratsak jarraitu.

Urrats 7: Hartu $m(F(j), i) = a(F(j), i)/a(F(i), i)$

Urrats 8: $(E_{F(j)} - m(F(j), i)E_{F(i)}) \longleftrightarrow (E_{F(j)})$ egin.

Urrats 9: Baldin $a(F(n), n) = 0$, IRTEERA (soluzio bat baino gehiago daude); GELDITU.

Atzerakako Ordezkapena

Urrats 10: Hartu $x_n = a(F(n), n+1)/a(F(n), n)$

Urrats 11: $i = n-1, \dots, 1$ bitartean $x_i = (a(F(i), n+1) - \sum_{j=i+1}^n a(F(i), j)x_j)/a(F(i), i)$ hartu.

Urrats 12: IRTEERA $(x_1, \dots, x_n)$; (prozesu asebetegarria) GELDITU.

Algoritmo honek Ezabapen Gaussiarra arruntarekin konparatuz ez du eragiketa askoz gehiagorik behar, beraz konputazionalki ez dio prozesuari denbora askorik gehitzen eta nabaritzen da emaitzak hobeagoak direla.

3. GAUSS-JORDANEN ALGORITMOA

Demagun A matrize singularra. Cramer-en erregelak $Ax = y$ sistemaren soluzioa aurkitzeko A^{-1} matrizea erabili ohi du, $x = A^{-1}y$ baita. Gauss-Jordan-en algoritmoak matrizearen alderantzizkoa lortzeko teknika sistematikoa ematen digu. Izan bitez $x, y \in \mathbb{R}^n$ eta $Ax = y$ sistema lineala:

$$\begin{array}{l} E_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1, \\ \vdots \\ E_n : a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n. \end{array}$$

Metodo hau ekuazio sistemak ebazteko betiko ezezagun-ordezkapenaren metodoa baino ez da. Metodo honen lehenengo urratsean x_1 aldagaia $\{x_2, \dots, x_n, y_r\}$ moduko aldagaien funtziopekoan idatziko dugu. Doitasuna hobetzeko zutabe-piboteo maximoa sar dezakegu ere, $|a_{r1}| = \max_{1 \leq i \leq n} |a_{i1}|$ betetzen duen $a_{r1} \neq 0$ aukeratzuz. Gero $(E_1) \longleftrightarrow (E_r)$ errenkada-aldaketa beteko dugu ondoko sistema berria lortuz,

$$\begin{array}{l} E_1 : \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \cdots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{y}_1, \\ \vdots \\ E_n : \bar{a}_{n1}x_1 + \bar{a}_{n2}x_2 + \cdots + \bar{a}_{nn}x_n = \bar{y}_n. \end{array}$$

non $\bar{a}_{1i} = a_{ri}$ eta $\bar{y}_1 = y_r$ baitira. Baldin $\bar{a}_{11} = 0$ bada A singularra da eta sistemak soluzio bat baino gehiago ditu, bestela, E_1 -etik x_1 askatu eta beronen adierazpena beste ekuazioetan ordezkatu.

$$x_1 = \frac{1}{\bar{a}_{11}} [\bar{y}_1 - \bar{a}_{12}x_2 - \dots - \bar{a}_{1n}x_n]$$

Beraz $a'_{11} = \frac{1}{\bar{a}_{11}}$, $a'_{1k} = -\frac{\bar{a}_{1k}}{\bar{a}_{11}}$, $a'_{i1} = \frac{\bar{a}_{i1}}{\bar{a}_{11}}$ eta $a'_{ik} = \bar{a}_{ik} - \bar{a}_{i1} \frac{\bar{a}_{1k}}{\bar{a}_{11}} \quad \forall i, k = 2, 3, \dots, n$.

Transformazio hauen bidez ondoko sistema baliokidea dugu:

$$\begin{array}{l} E_1 : a'_{11}\bar{y}_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = x_1 \\ \vdots \\ E_n : a'_{n1}\bar{y}_1 + a'_{n2}x_2 + \cdots + a'_{nn}x_n = \bar{y}_n \end{array}$$

Hurrengo urratsean bigarren ekuaziotik x_2 askatu eta emaitza beste ekuazio guztietan ordezkatzeko dugu modu berean. Prozesu hau ezezagun guztiak askatu arte errepikatuko dugu. Urrats bakoitzeko matrizeek $A^{(0)} \rightarrow A^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow A^{(n)}$ moduko segida osatuko dute. j . urratsari dagokion sistema ondokoa da:

$$\begin{array}{l} E_1 : a_{11}^{(j)}\bar{y}_1 + \cdots + a_{1j}^{(j)}\bar{y}_j + a_{1j+1}^{(j)}x_{j+1} + \cdots + a_{1n}^{(j)}x_n = x_1 \\ \vdots \\ E_j : a_{j1}^{(j)}\bar{y}_1 + \cdots + a_{jj}^{(j)}\bar{y}_j + a_{jj+1}^{(j)}x_{j+1} + \cdots + a_{jn}^{(j)}x_n = x_j \\ E_{j+1} : a_{j+11}^{(j)}\bar{y}_1 + \cdots + a_{j+1j}^{(j)}\bar{y}_j + a_{j+1j+1}^{(j)}x_{j+1} + \cdots + a_{j+1n}^{(j)}x_n = \bar{y}_{j+1} \\ \vdots \\ E_n : a_{n1}^{(j)}\bar{y}_1 + \cdots + a_{nj}^{(j)}\bar{y}_j + a_{nj+1}^{(j)}x_{j+1} + \cdots + a_{nn}^{(j)}x_n = \bar{y}_n \end{array}$$

Zutabe piboteo maximoarekiko Gauss-Jordan-en algoritmorako erregelak

- $|a_{rj}| = \max_{j \leq i \leq n} |a_{ij}|$ betetzen duen $j \leq r \leq n$ azpiindizerik txikiena hautatu. Baldin $a_{rj} = 0$, orduan matrizea singularra da eta ez dago soluziorik.
- $A^{(j-1)}$ -ren r eta j errenkadak elkarren artean aldatu eta emaitza $\bar{A} = (\bar{a}_{ik})$ -tzat idatzi.
- Ondoko formuleen bitartez $i, k \neq j$ direnean $A^{(j)} = (a'_{ik})$ kalkulatu:

$$a'_{jj} = \frac{1}{\bar{a}_{jj}}, \quad a'_{jk} = \frac{-\bar{a}_{jk}}{\bar{a}_{jj}}, \quad a'_{ij} = \frac{\bar{a}_{ij}}{\bar{a}_{jj}}, \quad a'_{ik} = \bar{a}_{ik} - \bar{a}_{ij} \frac{\bar{a}_{jk}}{\bar{a}_{jj}}$$

Azken $A^{(n)}$ -k $A^{(n)}\bar{y} = x$ beteko du non $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)^t$ bektorea $(y_1, \dots, y_n)$ -ren permutazioa den,

$$\bar{y} = P(y) \Rightarrow A^{(n)}\bar{y} = A^{(n)}P(y) = x \Rightarrow A^{-1} = A^{(n)}P$$

Adibidea

Izan bedi ondorengo matrizea. Bere alderantzizkoa aurkitu errenkada-ordezkapenik gabe.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^{(0)} = A \quad \text{hartuko dugu}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{a}_{11}} & \frac{-\bar{a}_{12}}{\bar{a}_{11}} & \frac{-\bar{a}_{13}}{\bar{a}_{11}} \\ \frac{\bar{a}_{21}}{\bar{a}_{11}} & \bar{a}_{22} - \bar{a}_{21}\frac{\bar{a}_{12}}{\bar{a}_{11}} & \bar{a}_{23} - \bar{a}_{21}\frac{\bar{a}_{13}}{\bar{a}_{11}} \\ \frac{\bar{a}_{31}}{\bar{a}_{11}} & \bar{a}_{32} - \bar{a}_{31}\frac{\bar{a}_{12}}{\bar{a}_{11}} & \bar{a}_{33} - \bar{a}_{31}\frac{\bar{a}_{13}}{\bar{a}_{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} - \bar{a}_{12}\frac{\bar{a}_{21}}{\bar{a}_{22}} & \frac{\bar{a}_{12}}{\bar{a}_{22}} & \bar{a}_{13} - \bar{a}_{12}\frac{\bar{a}_{23}}{\bar{a}_{22}} \\ \frac{-\bar{a}_{21}}{\bar{a}_{22}} & \frac{1}{\bar{a}_{22}} & \frac{-\bar{a}_{23}}{\bar{a}_{22}} \\ \bar{a}_{31} - \bar{a}_{32}\frac{\bar{a}_{21}}{\bar{a}_{22}} & \frac{\bar{a}_{32}}{\bar{a}_{22}} & \bar{a}_{33} - \bar{a}_{32}\frac{\bar{a}_{23}}{\bar{a}_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} - \bar{a}_{13}\frac{\bar{a}_{31}}{\bar{a}_{33}} & \bar{a}_{12} - \bar{a}_{13}\frac{\bar{a}_{32}}{\bar{a}_{33}} & \frac{\bar{a}_{13}}{\bar{a}_{33}} \\ \bar{a}_{21} - \bar{a}_{23}\frac{\bar{a}_{31}}{\bar{a}_{33}} & \bar{a}_{22} - \bar{a}_{23}\frac{\bar{a}_{32}}{\bar{a}_{33}} & \frac{\bar{a}_{23}}{\bar{a}_{33}} \\ \frac{-\bar{a}_{31}}{\bar{a}_{33}} & \frac{-\bar{a}_{32}}{\bar{a}_{33}} & \frac{1}{\bar{a}_{33}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Adibidea

Zutabe piboteo maximoarekiko Gauss-Jordan-en metodoaren bidez eta 5 digito esangarrietako aritmetikaz ondoko sistema ebatzi.

$$\begin{aligned} E_1 : & 1.5611x_1 + 5.1791x_2 - 1.6852x_3 = 8.4254 \\ E_2 : & 3.3330x_1 + 15920x_2 + 10.333x_3 = 15913 \\ E_3 : & 2.2220x_1 + 16.710x_2 - 9.6120x_3 = 28.544 \end{aligned}$$

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.5611 & 5.1791 & -1.6852 \\ 3.3330 & 15920 & 10.333 \\ 2.2220 & 16.710 & -9.6120 \end{pmatrix} \xRightarrow{(E_1) \leftrightarrow (E_2)} \bar{A} = \begin{pmatrix} 3.3330 & 15920 & 10.333 \\ 1.5611 & 5.1791 & -1.6852 \\ 2.2220 & 16.710 & -9.6120 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 15913 \\ 8.4254 \\ 28.544 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.30003 & -4776.5 & -3.1002 \\ 0.46838 & -7451.4 & -6.5250 \\ 0.66667 & -10596 & -16.501 \end{pmatrix} \xRightarrow{(E_2) \leftrightarrow (E_3)} \bar{A} = \begin{pmatrix} 0.30003 & -4776.5 & -3.1002 \\ 0.66667 & -10596 & -16.501 \\ 0.46838 & -7451.4 & -6.5250 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.49371 * 10^{-3} & 0.45078 & 4.3382 \\ 0.62917 * 10^{-4} & -0.94375 * 10^{-4} & -0.15573 * 10^{-2} \\ -0.44077 * 10^{-3} & 0.70323 & 5.0790 \end{pmatrix} = \bar{A}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.11723 * 10^{-3} & -0.14988 & 0.85414 \\ 0.62782 * 10^{-4} & 0.12125 * 10^{-3} & -0.30662 * 10^{-3} \\ 0.86783 * 10^{-4} & -0.13846 & 0.19689 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{pmatrix}$$

$$x = A^{(3)}\bar{y} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -0.11723e - 3 * 15913 - 0.14988 * 28.544 + 0.85414 * 8.4254 = 1.0528 \\ x_2 = 0.62782e - 4 * 15913 + 0.12125e - 3 * 28.544 - 0.30662e - 4 * 8.4254 = 1.0023 \\ x_3 = 0.86783e - 4 * 15913 - 0.13846 * 28.544 + 0.19689 * 8.4254 = -0.91235 \end{cases}$$

Orduan $x^* = (1.0528, 1.0023, -0.91235)$ Gauss-Jordan-en metodoaz lorturiko hurbilketa ez da oso zehatza $x = (1.0, 1.0, -1.0)$ -rekin konparatuz.

Kalkuluak eskuz egiterakoan $A^{(k)}$ matrizeak ez dira ikusitako formulen bidez eraikitzen, beste aldagaien menpeko ezezagun bakoitzaren adierazpena zuzenean beste ekuazioetan sartzen da baizik.

Adibidea

Ondoko sistema zutabe piboteo maximoarekiko Gauss-Jordanen metodoaren bidez ebatzi, eta egin eragiketak 3 digito esangarriekin.

$$\begin{array}{lcl} E_1 : & x_1 & + \quad 2x_2 \quad - \quad x_3 = 2 \\ E_2 : & 2x_1 & + \quad x_2 \quad \quad \quad = 3 \\ E_3 : & -x_1 & + \quad x_2 \quad + \quad x_3 = 4 \end{array}$$

ARIKETAK

1. Ondoko sistema linealak 2 digitoekiko biribiltze aritmetikaz eta metodo hauen bidez ebatzi:
i) Atzerakako ordezkapenarekiko ezabapen Gaussiarra ; ii) Zutabe piboteo maximoarekiko ezabapen Gaussiarra ; iii) Zutabe piboteo eskalatuarekiko ezabapen Gaussiarra ; iv) Zutabe piboteo maximoarekiko Gauss-Jordan. Gero ebatzi sistemak aritmetika zehatzaz eta metodo berauetaz ere. Emaitzak konparatu:

$$a) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2 \end{cases} \quad b) \quad \begin{cases} 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.4x_3 = 1.1 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

2. Ondoko sistema linealak 3 digitoekiko biribiltze aritmetikaz eta lehenengo adibidearen metodoen bidez ebatzi:

$$a) \quad \begin{cases} 0.832x_1 + 0.448x_2 + 0.193x_3 = 1.00 \\ 0.784x_1 + 0.421x_2 - 0.207x_3 = 0.00 \\ 0.784x_1 - 0.421x_2 + 0.279x_3 = 0.00 \end{cases} \quad b) \quad \begin{cases} 0.03x_1 + 0.589x_2 = 59.2 \\ 5.31x_1 - 6.10x_2 = 47.0 \end{cases}$$

$$d) \quad \begin{cases} 58.9x_1 + 0.03x_2 = 59.2 \\ -6.10x_1 + 5.31x_2 = 47.0 \end{cases} \quad e) \quad \begin{cases} \pi x_1 - ex_2 + \sqrt{2}x_3 - \sqrt{3}x_4 = 1 \\ \pi^2 x_1 + ex_2 - e^2 x_3 + 3/7 x_4 = -1 \\ \sqrt{5}x_1 - \sqrt{6}x_2 + x_3 - 1.1x_4 = 3 \\ \pi^3 x_1 + e^2 x_2 - \sqrt{7}x_3 + x_4 = \sqrt{2} \end{cases}$$

KAPITULU IV. MATRIZE FAKTORIZAZIO ZUZENA

1. SARRERA ETA METODOA

Baldin $Ax = b$ sistema errenkada-ordezkapenik gabe ezabapen Gaussiarraren bidez ebatzi badaiteke, orduan A matrizea L matrize goi-triangeluarra bider U behe-triangeluarraren moduan faktORIZA daiteke,

$$A = LU \Rightarrow b = Ax = LUx \Rightarrow z = Ux \quad \text{hartuz} \quad Lz = b \quad \text{sistema} \quad \text{dugu.}$$

L goi-triangeluarra denez zuzenean atzerakako ordezkapena aplika diezaiokegu z aurkitzeko. Gero $Ux = z$ sistemaren U matrizea triangeluarra denez erebai, beste aurrerakako ordezkapenaren bidez x soluzioa lortuko dugu. A -ren LU faktORIZAZIOA beti berdina denez, behin deskonposatuta egon, gero b bektore aske ezberdinetarako $Ax = b$ sistema askatuko genuke soilik bi ordezkapenak aplikatuz.

Adibidea

Demagun ondoko 4×4 matrize diagonalki menpekota eta kalkulatu bere LU faktORIZAZIOA:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

L eta U -k 20 osagai ezezagunak dituzte baina A -k soilik 16 osagai dituen L eta U matrizeen 16 osagai baino ezin dugu finkatu eta falta diren 4 osagaiei edozein balioak emango dizkiegu. Adibidez, Dolittle-ren metodoak $l_{11} = l_{22} = \dots = 1$ aukeratzen ditu, Crout-enak $u_{11} = u_{22} = \dots = 1$ eta Cholesky-renak $l_{ii} = u_{ii}$. Adibide hau Dolittlenaren bitartez askatuko dugu:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = A$$

A -ren lehenengo errenkadak lau ekuazio hauek halabehartzen ditu, $u_{11} = 6$, $u_{12} = 2$, $u_{13} = 1$ eta $u_{14} = -1$, eta A -ren lehenengo zutabeak ondoko hirurak:

$$l_{21}u_{11} = 2 \Rightarrow l_{21} = 1/3, \quad l_{31}u_{11} = 1 \Rightarrow l_{31} = 1/6 \quad \text{eta} \quad l_{41}u_{11} = -1 \Rightarrow l_{41} = -1/6$$

Jadanik L -ren lehenengo zutabea eta U -ren lehenengo errenkada kalkulatu ditugu:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & l_{32} & 1 & 0 \\ -1/6 & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad U = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

Orain A -ren bigarren errenkada eta bigarren zutabeak ondoko ekuazioak beteko dituzte:

$$\begin{aligned} l_{21}u_{12} + u_{22} &= 2/3 + u_{22} = 4 \Rightarrow u_{22} = 10/3 \\ l_{21}u_{13} + u_{23} &= 1/3 + u_{23} = 1 \Rightarrow u_{23} = 2/3 \\ l_{21}u_{14} + u_{24} &= -1/3 + u_{24} = 0 \Rightarrow u_{24} = 1/3 \\ l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} &= 2/6 + (10/3) \cdot l_{32} = 4 \Rightarrow l_{32} = 1/5 \\ l_{41}u_{12} + l_{42}u_{22} &= -2/6 + (10/3) \cdot l_{42} = 4 \Rightarrow l_{42} = 1/10 \end{aligned}$$

Jarraian A -ren hirugarren errenkada eta hirugarren zutabeak ondoko ekuazioak beteko dituzte:

$$\begin{aligned} l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} &= 1/6 + 1/5 \cdot 2/3 + u_{33} = 4 \Rightarrow u_{33} = 37/10 \\ l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} + u_{34} &= -1/6 + 1/5 \cdot 1/3 + u_{34} = -1 \Rightarrow u_{34} = -9/10 \\ l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43}u_{33} &= -1/6 + 1/10 \cdot 2/3 + (37/10) \cdot l_{43} = -1 \Rightarrow l_{43} = -9/37 \end{aligned}$$

Bukatzeko a_{44} halabehartzen du azken osagaiaren balioa:

$$l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34} + u_{44} = 1/6 + 1/10 \cdot 1/3 + 9/37 \cdot 9/10 + u_{44} = 3 \Rightarrow u_{44} = 191/74$$

Datu guzti hauekin A -ren faktORIZAZIOA ondokoa da,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/5 & 1 & 0 \\ -1/6 & 1/10 & -9/37 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 10/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 37/10 & -9/10 \\ 0 & 0 & 0 & 191/74 \end{pmatrix}$$

2. DOLITTLE ETA CROUTen ALGORITMOAK

Dolittle edo Crouten faktORIZAZIO zuzeneko algoritmoa

Algoritmoak $A = (a_{ij})$ $n * n$ matrizea $L = (l_{ij})$ matrize goi-triangeluarra bider $U = (u_{ij})$ matrize behe-triangeluarraren moduan faktORIZATZEN DU.

Sarreran: Dimentsioa n ; matrizea $A_h = (a_{ij})$; diagonalak $(l_{ii})_{i=1}^n$ (Dolittle) edo $(u_{ii})_{i=1}^n$ (Crout).

Irteeran: l_{ij} eta u_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ osagaiak edo porrot mezua.

Urrats 1: $l_{11}u_{11} = a_{11}$ betetzen duten l_{11} eta u_{11} aurkitu. Baldin $l_{11}u_{11} = 0$ bada orduan, IRTEERA (faktORIZAZIO ezinezkoa); GELDITU.

Urrats 2: Hartu $u_{1j} = a_{1j}/l_{11}$, $l_{j1} = a_{j1}/u_{11}$, $j = 2, \dots, n$

Urrats 3: $i = 2, 3, \dots, n - 1$ den bitartean 4-5 urratsak jarraitu.

Urrats 4: $l_{ii}u_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{ki}$ adierazpena betetzen duen l_{ii} eta u_{ii} aurkitu. Baldin $l_{ii}u_{ii} = 0$, orduan IRTEERA (faktORIZAZIO ezinezkoa); GELDITU.

Urrats 5: Hartu

$$u_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \right) / l_{ii}; \quad l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki} \right) / u_{ii}, \quad j = i + 1, \dots, n$$

Urrats 6: $l_{nn}u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn}$ adierazpena betetzen duen l_{nn} eta u_{nn} aurkitu. Baldin $l_{nn}u_{nn} = 0$ bada orduan, $A = LU$ baina A singularra da.

Urrats 7: IRTEERA (l_{ij} eta u_{ij} $i, j = 1, \dots, n$); (prozesu asebetegarria) GELDITU.

Piboteorik gabeko algoritmo honek erakar dezaken eragozpena biribiltze errorea da. Digo kopuru finitua erabili direnean biribiltze errorea itzela izan daitekela ikusi dugu. Beraz, mota hone-tako algoritmoek eragozpen hau gaindi dezaten mekanismoak erantsi behar zaizkie. Doolittle-ren ka-suan l_{ji} osagaiak kalkulatzeko zatitu behar da zati u_{ii} osagaia, beraz, errorea txikitzeko komeni-garria da ahal den u_{ii} pibote-osagairik handienak hautatzea. Horretarako $\left| a_{pi} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{pk}u_{ki} \right| = \max_{i \leq j \leq n} \left| a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki} \right|$ adierazpena betetzen duen $1 \leq p \leq n$ zenbakirik txikiena hautatuko dugu. Baldin $p \neq i$ bada A matrizearen i . eta p . errenkadaren osagaiak elkarren artean ordeztuko ditugu eta L matrizearen orduan arte kalkulatu-tako bi errenkada horien osagaiak erebai.

Ondorengo algoritmoan aurrekoari zutabe piboteo maximoa eta aurrerakako eta atzerakako ordezkapenak erantsi dizkiogu.

Zutabe piboteo maximoarekiko faktORIZAZIO zuzeneko algoritmoa

Algoritmoak $A = LU$ faktorizatu eta $Lz = b$, $Ux = z$ ebatzi ondoren $Ax = b$ sistema askatzen du:

Sarreraren: Dimentsioa n ; matrizea $A_h = (a_{ij})$; diagonalak $(l_{ii})_{i=1}^n$ (Dolittle) edo $(u_{ii})_{i=1}^n$ (Crout).

Irteeraren: $(x_1, \dots, x_n)$ soluzioa edo soluzio bat baino gehiago daudeneko mezua.

Urrats 1: $|a(p, 1)| = \max_{1 \leq j \leq n} |a(j, 1)|$ betetzen duen $1 \leq p \leq n$ zenbakirik txikiena aukeratu. Baldin $|a(p, 1)| = 0$, orduan IRTEERA (soluzio bat baino gehiago daude); GELDITU.

Urrats 2: Baldin $p \neq 1$ bada $(E_p) \longleftrightarrow (E_1)$ errenkada-aldaketa.

Urrats 3: $l_{11}u_{11} = a_{11}$ betetzen duten l_{11} eta u_{11} aurkitu.

Urrats 4: Hartu $u_{1j} = a_{1j}/l_{11}$, $l_{j1} = a_{j1}/u_{11}$, $j = 2, \dots, n$

Urrats 5: $i = 2, \dots, n-1$ den bitartean 6-9 urratsak jarraitu.

Urrats 6: Izan bedi p ondoko adierazpena betetzen duen zenbakirik txikiena:

$$\left| a_{pi} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{pk}u_{ki} \right| = \max_{i \leq j \leq n} \left| a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki} \right|$$

Baldin maximo hori 0 bada, orduan IRTEERA (soluzio bat baino gehiago daude); GELDITU.

Urrats 7: Baldin $p \neq i$ bada $(E_p) \longleftrightarrow (E_i)$ burutu eta L matrizearen i eta p errenkadeen osagaiak elkarren artean aldatu.

Urrats 8: $l_{ii}u_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{ki}$ betetzen duten l_{ii} eta u_{ii} aurkitu.

Urrats 9: Hartu

$$u_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \right) / l_{ii}; \quad l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki} \right) / u_{ii}, \quad j = i+1, \dots, n$$

Urrats 10: Hartu $AUX = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn}$. Baldin $AUX = 0$ bada, orduan IRTEERA (soluzio bat baino gehiago daude); GELDITU. Bestela $l_{nn}u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn}$ adierazpena betetzen duen l_{nn} eta u_{nn} aurkitu.

$Lz = b$ **Sistemaren ebazpena**

Urrats 11: Hartu $z_1 = a(1, n+1)/l(1, 1)$

Urrats 12: Hartu $z_i = \left(a(i, n+1) - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}z_j \right) / l_{ii}$, $i = 2, \dots, n$

$Ux = z$ **Sistemaren ebazpena**

Urrats 13: Hartu $x_n = z_n/u_{nn}$

Urrats 14: Hartu $x_i = \left(z_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j \right) / u_{ii}$, $i = n-1, \dots, 1$

Urrats 15: IRTEERA $(x_1, \dots, x_n)$; (prozesu asebetegarria) GELDITU.

Adibidea

Ondoko sistema zutabe piboteo maximoarekiko faktORIZAZIO zuzeneko algoritmoaren bidez (Dolittle) askatu eta eragiketak 3 digito esangarriekin kalkulatu:

$$\begin{array}{rrrrrr} 1.00x_1 & + & 0.333x_2 & + & 1.50x_3 & - & 0.333x_4 & = & 3.00 \\ -2.01x_1 & + & 1.45x_2 & + & 0.50x_3 & + & 2.95x_4 & = & 5.40 \\ 4.32x_1 & - & 1.95x_2 & & & + & 2.08x_4 & = & 0.13 \\ 5.11x_1 & - & 4.00x_2 & + & 3.33x_3 & - & 1.11x_4 & = & 3.77 \end{array}$$

Algoritmoak ematen digun soluzioa $(x_1 = -0.329, x_2 = 0.322, x_3 = 2.37, x_4 = 1.04)$. Ondoko taulan algoritmoen emaitzeen konparazioa egiten da:

	x_1	x_2	x_3	x_4
Soluzio zehatza	-0.324	0.321	2.37	1.04
Piboteoarekiko fakt.	-0.329	0.322	2.37	1.04
Piboteogabeko fakt.	-0.370	0.236	2.42	1.03

3. CHOLESKY-ren ALGORITMOA

Baldin A matrize simetriko eta positibo definitua bada, orduan faktORIZAZIO zuzenekoa baino eragiketa kopuru gutxiago behar duen A -ren faktORIZAZIO egokia egin daiteke.

Teorema

Baldin A $n \times n$ matrize simetriko eta positibo definitua bada, orduan $A = LL^t$ moduko faktORIZAZIOA egin daiteke non L matrize behe-triangeluarra baita.

Cholesky-ren algoritmoa

Algoritmoak $A = (a_{ij})$ -ren LL^t faktORIZAZIOA lortzen du, non $L = (l_{ij})$ behe-triangeluarra den.

Sarreran: Dimentsioa n ; $A_h = (a_{ij})$ matrizea.

Irteeran: l_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ osagaiak.

Urrats 1: Hartu $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$.

Urrats 2: Hartu $l_{j1} = a_{j1}/l_{11}$, $j = 2, \dots, n$.

Urrats 3: $i = 2, 3, \dots, n-1$ den bitartean 4-5 urratsak jarraitu.

Urrats 4: Hartu $l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$.

Urrats 5: Hartu $l_{ji} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}l_{ik})/l_{ii}$, $j = i+1, \dots, n$.

Urrats 6: Hartu $l_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}^2}$.

Urrats 7: IRTEERA $(l_{ij}, i, j = 1, \dots, n)$; (prozesu asebetegarria) GELDITU.

A $n \times n$ matrizearen Cholesky-ren faktORIZAZIOA ondoko eragiketa kopurua behar du: n erro karratu; $(n^3 + 9n^2 + 2n)/6$ biderkaketa/zatiketa; $(n^3 + 6n^2 - 7n)/6$ batuketa/kenketa. Eragiketa kopuru hau gutxi gora-behera Ezabapen Gaussiarrak behar duen kopuru erdia da.

Adibidea

Cholesky-ren metodoaren bidez A matrize positibo definitua faktORIZATU:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.25 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 3.5 \end{pmatrix}$$

4. SISTEMA TRIDIAGONALETARAKO CROUT-en ALGORITMOA

Matrize bandaren leku simetrikoetan zero ugari daudenez algoritmo erreza eraiki dezakegu. Egoera honenpean Crout eta Dolittlen metodoek garapen berezia izango dute. Demagun A matrize tridiagonala,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{n-1n-2} & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Suposa dezagun $A = LU$ faktORIZAZIOA existitzen dela. A matrizeak soilik $(3n-2)$ osagai ($\neq 0$) dituen L eta U -ren osagaiak aurkitzeko $(3n-2)$ baldintza baino ez dugu izango. Har dezagun

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & l_{n-1n-2} & l_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{nn-1} & l_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & u_{n-1n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

non $A = LU$. L matrizeak $2n - 1$ osagai ezezagun ditu eta U -k $n - 1$. Beraz, L eta U -ren osagaiak finkatzeko $(3n - 1)$ baldintza baino ez dugu behar eta dagozkien ekuazioak ondokoak dira:

$$a_{11} = l_{11}; \quad a_{ii-1} = l_{ii-1}, \quad i = 2, \dots, n; \quad l_{ii}, \quad i = 2, \dots, n; \quad a_{ii+1} = l_{ii}u_{ii+1}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Sistema tridiagonaletarako Crout-en algoritmoa

Algoritmoak sistema lineal tridiagonalaren soluzioa aurkitzen du:

Sarreran: "n" ekuazio kopurua; $A_h = (a_{ij})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n+1$ matrize hedatua.

Irteeran: $(x_1, \dots, x_n)$ soluzioa.

Urrats 1: Hartu $l_{11} = a_{11}$ eta $u_{12} = a_{12}/l_{11}$

Urrats 2: Hartu $l_{ii-1} = a_{ii-1}$; $l_{ii} = a_{ii} - l_{ii-1}u_{i-1i}$; $u_{ii+1} = a_{ii+1}/l_{ii}$, $i = 2, \dots, n-1$

Urrats 3: Hartu $l_{nn-1} = a_{nn-1}$; $l_{nn} = a_{nn} - l_{nn-1}u_{n-1n}$

$$Lz = b \quad \text{Sistemaren ebazpena}$$

Urrats 4: Hartu $z_1 = u_{1n+1}/l_{11}$

Urrats 5: Hartu $z_i = (a_{in+1} - l_{ii-1}z_{i-1})/l_{ii}$, $i = 2, \dots, n$

$$Ux = z \quad \text{Sistemaren ebazpena}$$

Urrats 6: Hartu $x_n = z_n$

Urrats 7: Hartu $x_i = z_i - u_{ii+1}x_{i+1}$, $i = n-1, \dots, 1$

Urrats 8: IRTEERA $(x_1, \dots, x_n)$ sistemaren soluzioa; GELDITU.

Algoritmo honek soilik $(5n - 4)$ biderkaketa/zatiketa eta $(3n - 3)$ batuketa/kenketa behar ditu, beraz, baldin n handia bada abantaila izugarria ematen du.

Adibidea

Ondoko sistema tridiagonala Crout-en algoritmoaz askatu (Soluzioa $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ da):

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & = & 0 \\ & & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \end{pmatrix}$$

Baldin A matrize tridiagonala eta positibo definitua bada edo hertsiki diagonalaki menpekota, orduan $A = LU$ faktORIZAZIOAREN diagonaleko koefizienteak $l_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$ dira eta sistema tridiagonaletarako Crout-en algoritmoa aplikatu daiteke.

ARIKETAK

1. Ondoko matrizeak Dolittle-ren ($l_{ii} = 1$) eta piboteo maximoarekiko Doolittle-ren metodoaz faktORIZATU eta sistemak askatu:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & -1 \\ 3 & 3 & 9 & | & 8 \\ 3 & 3 & 5 & | & 5 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 2 & -1.5 & 3 & | & 2.5 \\ -1 & 0 & 3 & | & 1.5 \\ 4 & -4.5 & 5 & | & -3 \end{pmatrix}, \quad d) \begin{pmatrix} 1.012 & -2.132 & 3.104 & | & 2.618 \\ -2.132 & 4.096 & -7.013 & | & -6.339 \\ 3.104 & -7.013 & 0.014 & | & -5.401 \end{pmatrix}$$

3. Ondoko matrizeen $A = LL^t$ faktORIZAZIOA Cholesky-ren algoritmoaren bidez kalkulatu:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad d) \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Ondoko sistema tridiagonalak Crout-en algoritmoaren bidez askatu:

$$a) \begin{cases} x_1 & - & x_2 & & = & 0 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \\ & & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1.5 \end{cases}, \quad b) \begin{cases} 0.5x_1 & + & 0.25x_2 & & = & 0.35 \\ 0.35x_1 & + & 0.8x_2 & + & 0.4x_3 & = & 0.72 \\ & & 0.05x_2 & - & 0.55x_3 & = & 1.6 \end{cases}$$

KAPITULU V. SISTEMA LINEALAK EBAZTEKO ITERAZIOZKO TEKNIKAK

1. SARRERA ETA METODOA

$Ax = b$, $n \times n$ sistema lineala ebazteko iterazozko teknika martxan jartzeko x soluzioaren $x^{(0)}$ hasierako hurbilketa beharko dugu eta hurrenez hurren x -ra konbergitzen duen $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ bektore segida sortuko dugu. Jatorrizko sistema $x = Tx + d$ sistema baliokidea bihurtuko dugu, non T baldintza berezi batzuk betetzen dituen $n \times n$ matrizea eta $d \in \mathbb{R}^n$ bektorea diren. Gero bektoretarako puntu finkoaren bezelako $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + d$, $k = 1, 2, 3, \dots$, segida eraikiko dugu.

Dimentsio txikia duten sistemetak metodo hauek ez dira egokiak, doitasun berbera lortzeko metodo zuzenak baino eragiketa gehiago egin behar direlako, aitzitik, baldin dimentsioa handia bada edo matrizeak zero asko baditu metodo hauek besteak baino askoz erabilgarriagoak dira.

Adibidea

Ondoko $Ax = b$ sistema linealaren soluzio zehatza $x = (1, 2, -1, 1)^t$ da. Sistema $x = Tx + d$ erako eskemaaren ordeztuko dugu eta $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)$ estimazioarekin 10 iterazio burutu:

$$\begin{array}{rrrrrr} 10x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & = & 6 \\ -x_1 & + & 11x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 25 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & + & 8x_4 & = & 15 \end{array}$$

i . ekuaziotik x_i askatuz,
$$\begin{cases} x_1 = & \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}, \\ x_2 = & \frac{1}{11}x_1 + \frac{1}{11}x_3 - \frac{3}{11}x_4 + \frac{25}{11}, \\ x_3 = & -\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{10}x_4 - \frac{11}{10}, \\ x_4 = & -\frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{15}{8}. \end{cases}$$

Beraz
$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 25/11 \\ -11/10 \\ 15/8 \end{pmatrix}$$

Lehenengo iterazioa ondokoa da:

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1^{(1)} & = & \frac{1}{10}x_2^{(0)} - \frac{1}{5}x_3^{(0)} & + & \frac{3}{5} & = & 0.6000 \\ x_2^{(1)} & = & \frac{1}{11}x_1^{(0)} + \frac{1}{11}x_3^{(0)} - \frac{3}{11}x_4^{(0)} & + & \frac{25}{11} & = & 2.2727 \\ x_3^{(1)} & = & -\frac{1}{5}x_1^{(0)} + \frac{1}{10}x_2^{(0)} + \frac{1}{10}x_4^{(0)} & - & \frac{11}{10} & = & -1.1000 \\ x_4^{(1)} & = & -\frac{3}{8}x_2^{(0)} + \frac{1}{8}x_3^{(0)} & + & \frac{15}{8} & = & 1.8750 \end{array}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.6000	2.2727	-1.1000	1.8750
2	1.0473	1.7159	-0.80523	0.88524
3	0.93264	2.0533	-1.0493	1.1309
4	1.0152	1.9537	-0.96811	0.97385
5	0.98899	2.0114	-1.0103	1.0213
6	1.0032	1.9923	-0.99453	0.99444
7	0.99841	2.0023	-1.0020	1.0036
8	1.0006	1.9987	-0.99904	0.99889
9	0.99968	2.0004	-1.0004	1.0006
10	1.0001	1.9998	-0.99984	0.99980

Errorearen estimazioak ondokoak dira:

$$\frac{\|x^{(10)} - x^{(9)}\|_\infty}{\|x^{(10)}\|_\infty} = \frac{8.0 * 10^{-4}}{1.9998} < 10^{-3} \quad , \quad \|x^{(10)} - x\|_\infty = 0.0002$$

Erabilitako teknika hau Jacobiren iteraziozko metodoa izenekoa da eta baldin $a_{ii} \neq 0$ bada, sistemen i . ekuaziotik x_i aldagaia askatzean datza. Hauxek dira k . iterazioko formulak,

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n (a_{ij} x_j^{(k-1)}) \right] \quad , \quad i = 1, \dots, n.$$

Emaitza teorikoetan $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + d$ adierazpidearen A matrizea zati diagonalak eta zati ez diagonalean banatuko dugu:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow (D - L - U)x = b \Leftrightarrow Dx = (L + U)x + b \Leftrightarrow x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

Ondorioz, Jacobiren iteraziozko teknikaren eraikuntza matritziala dugu, $x^{(k)} = D^{-1}(L+U)x^{(k-1)} + D^{-1}b$

2. JACOBI-REN ETA GAUSS-SEIDEL-EN ALGORITMOAK

Jacobi-ren iteraziozko algoritmoa

Algoritmoak $x^{(0)}$ hasierako hurbilketa emanaz $Ax = b$ sistema lineala askatzen du.

Sarreran: Dimentsioa n ; $A_h = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, matrizea; b_i , $i = 1, \dots, n$, bektorea; x_{0i} , $i = 1, \dots, n$, hasierako hurbilketa; TOL toleranzia eta N_0 iterazio kopuru maximoa.

Irteeran: $(x_1, \dots, x_n)$ soluzio hurbildua edo N_0 iterazio kopuru maximoa gainditu deneko mezua.

Urrats 1: Hartu $k = 1$.

Urrats 2: $k \leq N_0$ den bitartean 3-5 urratsak jarraitu.

Urrats 3: Hartu $x_i = \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_{0j} \right) / a_{ii}$, $i = 1, \dots, n$.

Urrats 4: Baldin $\|x - x_0\| < TOL$, IRTEERA $\rightarrow (x_1, \dots, x_n)$; GELDITU.

Urrats 5: Hartu $x_{0i} = x_i$, $i = 1, \dots, n$ eta $k = k + 1$.

Urrats 6: IRTEERA (N_0 iterazio egin ondoren, metodoa porrot egin du); GELDITU.

Algoritmoaren 3. urratsean $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, izan behar du, baldin matrizea ez singularra bada eta baldintza hau ez bada betetzen, orduan, ekuazioak berrordena daitezke.

Geldi erizpidetzat algoritmoak $\|x - x_0\| < TOL$ edo $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| / \|x^{(k)}\| < \varepsilon$ har dezake.

Algoritmo honek $x_i^{(k)}$ kalkulatzeko $x^{(k-1)}$ -ren osagaiak darabiltza eta dagoeneko $x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$ -en balioak ezagunak dira. $\{x^{(k)}\}$ segida konbergentea bada suposa daiteke $x_j^{(k)}$, $j = 1, \dots, i-1$ hurbilketak hobeagoak direla $x_j^{(k-1)}$, $j = 1, \dots, i-1$ baino eta noski, algoritmoa eraginkorragoa izango da baldin $x_i^{(k)}$ -ren balioztapenean kalkulaturak dauden $x^{(k)}$ -ren osagaiak erabiltzen baditugu. Hobekuntza honek Gauss-Seidel-en iteraziozko algoritmoa izena du eta hauxek dira dagozkion formulak:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[- \sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij} x_j^{(k)}) - \sum_{j=i+1}^n (a_{ij} x_j^{(k-1)}) + b_i \right] \quad i = 1, \dots, n$$

Matrizialki $(D - L)x^{(k)} = Ux^{(k-1)} + b \iff x^{(k)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k-1)} + (D - L)^{-1}b$ adierazi ohi da.

Adibidea

Ondoko $Ax = b$ sistema lineala Gauss-Seidel-en bidez askatu. Hartu $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)$.

$$\begin{array}{rrrrrr} 10x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & = & 6 \\ -x_1 & + & 11x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 25 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & + & 8x_4 & = & 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} x_1^{(k)} & = & \frac{1}{10}x_2^{(k-1)} - \frac{1}{5}x_3^{(k-1)} + \frac{3}{5} \\ x_2^{(k)} & = & \frac{1}{11}x_1^{(k)} + \frac{1}{11}x_3^{(k-1)} - \frac{3}{11}x_4^{(k-1)} + \frac{25}{11} \\ x_3^{(k)} & = & -\frac{1}{5}x_1^{(k)} + \frac{1}{10}x_2^{(k)} + \frac{1}{10}x_4^{(k-1)} - \frac{11}{10} \\ x_4^{(k)} & = & -\frac{3}{8}x_2^{(k)} + \frac{1}{8}x_3^{(k)} + \frac{15}{8} \end{array}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.6000	2.3273	-0.98727	0.87885
2	1.00302	2.0369	-1.0145	0.98435
3	1.0066	2.0035	-1.0025	0.99838
4	1.0009	2.0003	-1.0003	0.99985
5	1.0001	2.0000	-1.0000	1.0000

$$\frac{\|x^{(5)} - x^{(4)}\|_{\infty}}{\|x^{(5)}\|_{\infty}} = \frac{8.0 * 10^{-4}}{2.000} = 4 * 10^{-4}$$

Ikus dezakegunez lehenengo adibidean lortutako doitasuna beharagotzeko hemen iterazio kopuru erdia behar izan dugu.

Gauss-Seidelen iteraziozko algoritmoa

Algoritmoak $x^{(0)}$ hasierako hurbilketa emanaz $Ax = b$ sistema lineala askatzen du.

Sarreran: n dimentsioa; $A_h = (a_{ij})$ $i, j = 1, \dots, n$ matrizea; b_i $i = 1, \dots, n$ bektorea; $x0_i$ $i = 1, \dots, n$ hasierako hurbilketa; TOL toleranzia; N_0 iterazio kopuru maximoa.

Irteeran: $(x_1, \dots, x_n)$ soluzio hurbildua edo N_0 iterazio kopuru maximoa gainditu deneko mezua.

Urrats 1: Hartu $k = 1$.

Urrats 2: $k \leq N_0$ den bitartean 3-6 urratsak jarraitu.

Urrats 3: Hartu $x_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x0_j\right)/a_{ii}$, $i = 1, \dots, n$.

Urrats 4: Baldin $\|x - x0\| < TOL$, IRTEERA $\rightarrow (x_1, \dots, x_n)$; GELDITU.

Urrats 5: Hartu $x0_i = x_i$, $i = 1, \dots, n$ eta $k = k + 1$.

Urrats 6: IRTEERA (N_0 iterazio egin ondoren, metodoa porrot egin du'); GELDITU.

Badaude adibideak non Gauss-Seidel-en metodoak konbergitzen baitu eta Jacobi-renak ez eta aldearantziz erebai. Hala ere kasu gehienetan biek konbergituz geroz Gauss-Seidel-en metodoa Jacobi-rena baino azkarragoa da.

3. ITERAZIOZKO PROZESUEN KONBERGENTZIA

Iteraziozko teknika orokorren konbergentzia aztertzeko $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + d$, $k = 1, 2, 3, \dots$, formula kontutan hartuko dugu, non $x^{(0)}$ hautazkoa den.

Lema

Baldin T -ren erradio espektrala, $\rho(T) < 1$ edo $\|T\| < 1$ bada, orduan $(I - T)^{-1}$ existitzen da eta $(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + \dots$ da.

Teorema

$\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + d$, $k \geq 1$, $d \neq 0$ adierazpenak definituriko $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ segidak $x = Tx + d$ ekuazioaren soluziora konbergituko du baldin eta solik baldin $\rho(T) < 1$.

frog

Teorema

Baldin $\|\cdot\|$ norma matrizialerako $\|T\| < 1$ bada, orduan $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + d$, $k \geq 1$, $d \neq 0$, adierazpenak definituriko $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ segidak $x = Tx + d$ soluzioorantz konbergituko du eta ondoko errore bornapenak beteko ditu:

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \|T\|^k \cdot \|x^{(0)} - x\| \quad \text{eta} \quad \|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

frog

Bereziki baldin $x^{(0)} = d$ hautatzen badugu, orduan:

$$x^{(1)} = Td + d \Rightarrow \|x^{(1)} - x^{(0)}\| = \|Td\| \leq \|T\| \cdot \|d\| \Rightarrow \|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|T\|^{k+1}}{1 - \|T\|} \|d\|$$

Adibidea

Jacobiren iteraziozko prozesuaren bidez ondoko sistemaren konbergentzia frogatu eta zenbat iterazio behar diren 10^{-4} baino txikiago errorearekiko soluzio hurbildua lortzeko adierazi.

$$\begin{array}{rcccccl} 10x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 10x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 20x_3 & - & x_4 & = & -10 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 20x_4 & = & 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1^{(k)} & = & 0.1x_2^{(k-1)} - 0.2x_3^{(k-1)} + 0.3x_4^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} & = & -0.1x_1^{(k)} + 0.1x_3^{(k-1)} - 0.2x_4^{(k-1)} + 0.5 \\ x_3^{(k)} & = & -0.1x_1^{(k-1)} - 0.15x_2^{(k)} + 0.05x_4^{(k-1)} - 0.5 \\ x_4^{(k)} & = & -0.15x_1^{(k)} - 0.1x_2^{(k)} - 0.05x_3^{(k)} + 0.75 \end{array}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & -0.2 & 0.3 \\ -0.1 & 0 & 0.1 & -0.2 \\ -0.1 & -0.15 & 0 & 0.05 \\ -0.15 & -0.1 & -0.05 & 0 \end{pmatrix}$$

T -ren magnitudea balioztatzeko $\|\cdot\|_1$ norma erabiliz, $\|T\|_1 = \max\{0.35, 0.35, 0.35, 0.55\} = 0.55 < 1$. Beraz, Jacobiren prozesua sistema honetarako konbergentea da. Izan bedi

$$x^{(0)} = d = (0.0, 0.5, -0.5, 0.75)^t \Rightarrow \|d\|_1 = 0.0 + 0.5 - 0.5 + 0.75 = 1.75$$

Azken teoremari esker ondorengo errorearen bornapena dugu:

$$\|x - x^{(k)}\|_1 \leq \frac{\|T\|_1^{k+1}}{1 - \|T\|_1} \|d\|_1 = \frac{0.55^{k+1} * 1.75}{0.45} < 10^{-4} \Rightarrow 0.55^{k+1} < \frac{45}{175} 10^{-4}$$

Logaritmoak sartuz k ezezaguna askatuko dugu:

$$(k+1)\log_{10}0.55 < \log_{10}45 - \log_{10}175 - 4 \Rightarrow (k+1)0.25964 < 1.65321 - 2.24304 - 4 \Rightarrow k \geq 16.7$$

k zenbaki osoa izan beharko da, beraz $k = 17$ aski da. Hala ere askoetan doitasun hori teoriak dioena baino lehenago beheragotuko da.

Orain Jacobi eta Gauss-Seidelen era matrizialak idatziko ditugu:

$$T_J = D^{-1}(L + U) \Rightarrow x^{(k)} = T_J x^{(k-1)} + D^{-1}b \quad (Jacobi)$$

$$T_{GS} = (D - L)^{-1}U \Rightarrow x^{(k)} = T_{GS}x^{(k-1)} + (D - L)^{-1}b \quad (Gauss - Seidel)$$

Badakigu eskema bakoitzaren matrizeen erradio espektralak < 1 badira, orduan, iterazioek soluziorantz konbergituko dutela. Orain, konbergentzia ziurtatzeko, beste baldintzak ikusiko ditugu.

Teorema

Baldin A matrizea hertsiki diagonalaki menpekoa bada, orduan $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ Jacobi-ren eta Gauss-Seidel-en algoritmoen $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ segidak $Ax = b$ sistemaren soluziorantz konbergituko dute.

$\|T\|$ eta $\rho(T)$ orden berekoak direnez errore-bornapena eta erradio espektrala elkarren artean erlazionatzeko ondoko adierazpena idatz dezakegu:

$$\|x^{(k)} - x\| \approx \rho(T)^k \|x^{(0)} - x\|$$

Beraz, hainbat eta $\rho(T)$ txikiago izan, metodoak orduan eta azkarrago konbergituko du.

Teorema

Baldin $a_{ii} > 0 \quad i = 1, \dots, n$ eta $a_{ij} \leq 0 \quad \forall i \neq j$ badira orduan ondoko baieztapenatariko soilik bat beteko da.

- a) $0 < \rho(T_{GS}) < \rho(T_J) < 1$
- b) $1 < \rho(T_J) < \rho(T_{GS})$
- c) $\rho(T_{GS}) = \rho(T_J) = 0$
- d) $\rho(T_J) = \rho(T_{GS}) = 1$

Kasu honetan baldin metodo bat konbergitzen badu Gauss-Seidel-en metodoak Jacobi-rena baino azkarrago konbergituko duela ikus daiteke.

4. LASAIKUNTZA METODOAK

Prozesuaren konbergentzia-abiadura eta metodoari dagokion matrizearen erradio espektralaren tamaina elkar erlazionaturik daude. Erradio espektralari txikiena duen matrizea hautatuz konbergentzi azkarra lortuko dugu. Prozesu hauek lasaikuntza metodoak izena dute. Izan bedi ondoko sistema lineala:

$$\begin{array}{ccccccc} E_1 : & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & e_1 \\ & \vdots & & & & \dots & & & & \vdots \\ E_n : & a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & e_n \end{array}$$

Orain b bektore askea berdintzaren eskubialdera pasatuz, E_i ekuazio bakoitza zati a_{ii} zatituz eta $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ hasierako estimazioa sistema sartuz, ondoko erlazioa dugu:

$$\begin{array}{rclcl} R_1^{(0)} & = & d_1 - x_1^{(0)} & + & \sum_{j=2}^n b_{1j}x_j^{(0)} & = & x_1^{(1)} - x_1^{(0)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ R_k^{(0)} & = & d_k - x_k^{(0)} & + & \sum_{j=1, j \neq k}^n b_{kj}x_j^{(0)} & = & x_k^{(1)} - x_k^{(0)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ R_n^{(0)} & = & d_n - x_n^{(0)} & + & \sum_{j=1}^{n-1} b_{nj}x_j^{(0)} & = & x_n^{(1)} - x_n^{(0)} \end{array}$$

non $b_{ij} = -a_{ij}/a_{ii}$, ($i \neq j$) eta $d_i = -e_i/a_{ii}$ baitira. $R_1^{(0)}$ "hondarrak" dira.

Baldin $x_s^{(0)}$ ezezagunari $\delta x_s^{(0)}$ gehikuntza ematen badiogu, orduan beroni dagokion $R_s^{(0)}$ hondarra lehenago baino $\delta x_s^{(0)}$ txikiago izango da eta besteak, $R_i^{(0)}$ ($i \neq s$), lehenago baino $b_{is} \delta x_s^{(0)}$ handiagoak. Beraz, $R_s^{(1)}$ hondarra ezabatzeke aski da $x_s^{(1)}$ -ri $\delta x_s^{(1)} = R_s^{(0)}$ gehikuntza ematea, eta ondorioz beste hondarreen balio berriak hauxek dira,

$$R_s^{(1)} = 0 \quad \text{eta} \quad R_i^{(1)} = R_i^{(0)} + b_{is} \delta x_s^{(0)} \quad i \neq s$$

Lasaikuntza metodorik bakunena hondarrarik handiena 0 egitean datza eta osagai egokiari gehikuntza berezia batuz. Hondarrak emandako tolerantzia baino txikiagoak direnean prozesua gelditu egingo da.

Adibidea

Bi digitoetako aritmetikaz eta lasaikuntza metodoaz ondoko $Ax = b$ sistema askatu:

$$\begin{array}{ccccccc} E_1 : & 10x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 6 \\ E_2 : & -x_1 & + & 10x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \\ E_3 : & -x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & = & 8 \end{array}$$

Lasaikuntza metodoa aplikatzeko sistema ondoko gisaz idatziko dugu:

$$\begin{array}{ccccccc} E_1 : & -x_1 & + & 0.2x_2 & + & 0.2x_3 & + & 0.6 & = & 0 \\ E_2 : & 0.1x_1 & - & x_2 & + & 0.2x_3 & + & 0.7 & = & 0 \\ E_3 : & 0.1x_1 & + & 0.1x_2 & - & x_3 & + & 0.8 & = & 0 \end{array}$$

$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ hasierako hurbilketatzat hartu ondoren hondarrik handienak hautatuko ditugu:

$$R_1^{(0)} = 0.60, \quad R_2^{(0)} = 0.70, \quad R_3^{(0)} = 0.80 \quad (\text{hondarrarik handiena})$$

Orain $\delta x_3^{(0)} = 0.80$ hartuko dugu, beraz:

$$\begin{array}{rcl} R_1^{(1)} & = & R_1^{(0)} + 0.2 * 0.8 = 0.60 + 0.16 = 0.76 \\ R_2^{(1)} & = & R_2^{(0)} + 0.2 * 0.8 = 0.70 + 0.16 = 0.86 \quad (\text{hondarrarik handiena}) \\ R_3^{(1)} & = & R_3^{(0)} - 0.8 = 0.80 - 0.80 = 0.0 \end{array}$$

Orain $\delta x_2^{(1)} = 0.86$, etab. Aldagaiek ondoko bilakaera jarraituko dute:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0.0 + 0.93 + 0.062 + 0.007 = 0.999 \longrightarrow 1.0 \\x_2 &= 0.0 + 0.86 + 0.13 + 0.016 = 1.006 \longrightarrow 1.0 \\x_3 &= 0.0 + 0.80 + 0.18 + 0.019 = 0.999 \longrightarrow 1.0\end{aligned}$$

Eragiketak ondoko taulan ikus dezakegu:

k	x_1	R_1	x_2	R_2	x_3	R_3
0	0.0	0.60	0.0	0.70	0.8	0.80
		0.16		0.16		-0.80
		0.76		0.86		0.0
1		0.17	0.86	-0.86		0.086
		0.93		0.0		0.086
2	0.93	-0.93		0.093		0.093
		0.0		0.093		0.18
3		0.036		0.036	0.18	-0.18
		0.036		0.13		0.0
4		0.026	0.13	-0.13		0.013
		0.062		0.0		0.013
5	0.062	-0.062		0.012		0.0062
		0.0		0.012		0.019
6		0.0038		0.0038	0.019	-0.019
		0.0038		0.016		0.0
7		0.0032	0.016	-0.016		0.0016
		0.007		0.0		0.0016
8	0.007	-0.007		0.0007		0.0007
		0.0		0.0007		0.0023
	1.0		1.0		1.0	

Lasaikuntza metodoen doitasuna neurtzeko sistema linealaren soluzio zehatza eta beronen hurbilketaren arteko aldea balioztatzen duen hondar-bektorea erabiliko dugu.

Definizioa

Baldin $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $Ax = b$ sistema linealaren soluzioaren hurbilketa bada, orduan sistema honekin elkartutako $\bar{x}$ -ren hondar-bektorea $r = b - A\bar{x}$ da.

Jacobi-ren eta Gauss-Seidel-en metodoetan soluzio-bektorearen osagai bakoitzaren hurbilketari hondar-bektore bat elkartzen zaio. Orobat, hondar-bektore elkartuek 0-ra konbergitzen duteneko hurbilketeen segida sortuko dute.

$$r_i^{(k)} = (r_{1i}^{(k)}, r_{2i}^{(k)}, \dots, r_{ni}^{(k)})^t.$$

Izan bedi $(x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)})^t$ Gauss-Seidel-en metodoaren soluzio-bektore hurbildua, beronen hondar-bektore elkartua eraikiko dugu:
 $r_i^{(k)}$ -ren m . osagaia ondokoa da:

$$r_{mi}^{(k)} = b_m - \sum_{j=1}^{i-1} a_{mj} x_j^{(k)} - \sum_{j=i}^n a_{mj} x_j^{(k-1)}, \quad m = 1, \dots, n.$$

Bereziki $r_i^{(k)}$ -ren i . osagaia ondokoa da:

$$r_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} - a_{ii}x_i^{(k-1)}$$

eta Gauss-Seidel-en iterazioaren $x_i^{(k)}$ -k bete behar duen baldintza honako hau da:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} \right) = x_i^{(k-1)} + \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}}.$$

Demagun ere $r_{i+1}^{(k)}$ -ren i . osagaia

$$r_{ii+1}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^i a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} - a_{ii}x_i^{(k)},$$

baina lehenengoan ikusi dugunez $a_{ii}x_i^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)}$ da. Beraz, $r_{ii+1}^{(k)} = 0$. Gauss-Seidelen metodoak $r_{i+1}^{(k)}$ -ren i . osagaia 0 bihurtu du. Hala ere hau ez da $r_{i+1}^{(k)}$ -ren norma laburtzeko modurik honena. Baldin Gauss-Seidelen teknika aldarazten badugu soluzio hurbilduaren osagaiak

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + w \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}}$$

adierazpenaren moduan definitzeko (non w hautazko konstante positiboa baita) lehenengoa baino emaitza obeagoa atera dezakegu. Era hauetako formulak erabiltzen dituzten tekniketara *lasaikuntza metodoak* esaten diegu. Baldin $0 < w < 1$ bada, orduan *azpilasaikuntza metodoak* esaten zaie (Gauss-Seidel), bestela, baldin $w > 1$ bada orduan *lasaikuntzgaineko metodoak* (Sucessive Over Relaxation XOR). Azken hauek deribatu parzialetazko ekuazioen zenbakizko ebazpenerako oso erabilgarriak dira.

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + w \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}} \quad \text{eta} \quad r_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} - a_{ii}x_i^{(k-1)}$$

ekuazioak konbinatuz ondoko formulazioa eraikiko dugu:

$$x_i^{(k)} = (1-w)x_i^{(k-1)} + \frac{w}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} \right]$$

SOR metodoaren era matritziala idazteko formula beronen beste adierazpidea behar dugu:

$$a_{ii}x_i^{(k)} + w \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} = (1-w)a_{ii}x_i^{(k-1)} - w \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} + wb_i.$$

Orain formulazio matritziala sar dezakegu:

$$(D-wL)x^{(k)} = [(1-w)D+wU]x^{(k-1)} + wb \Leftrightarrow x^{(k)} = (D-wL)^{-1}[(1-w)D+wU]x^{(k-1)} + w(D-wL)^{-1}b$$

Sucessive Over Relaxation iteraziozko algoritmoa (SOR)

Algoritmoak w parametroarekin eta $x^{(0)}$ estimazioarekin $Ax = b$ sistema lineala askatzen du.

Sarreran: n dimentsioa; $A_h = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, matrizea; b_i , $i = 1, \dots, n$, bektorea; x_{0i} , $i = 1, \dots, n$ hasierako hurbilketa; TOL toleranzia; w parametroa; N_0 iterazio kopuru maximoa.

Irteeran: $(x_1, \dots, x_n)$ soluzio hurbildua edo N_0 iterazio kopuru maximoa gainditu deneko mezua.

Urrats 1: Hartu $k = 1$.

Urrats 2: $k \leq N_0$ den bitartean 3-5 urratsak jarraitu.

Urrats 3: Hartu $x_i = (1-w)x_{0i} + \frac{w}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_{0j} \right)$, $i = 1, \dots, n$.

Urrats 4: Baldin $\|x - x_0\| < TOL$, IRTEERA $(x_1, \dots, x_n)$; GELDITU.

Urrats 5: Hartu $x_{0i} = x_i$, $i = 1, \dots, n$; hartu $k = k + 1$

Urrats 6: IRTEERA (N_0 'iterazio egin ondoren, metodoa porrot egin du'); GELDITU.

Adibidea

Ondoko $Ax = b$ sistemaren soluzio zehatza $x = (3, 4, -5)^t$ da. $x^{(0)} = (1, 1, 1)^t$ hasierako hurbilketa hartuz Gauss-Seidelen metodoaren bidez eta SOR-enaren bidez ($w = 1.25$) ebatzi:

$$\begin{aligned} E_1 : & 4x_1 + 3x_2 = 24 \\ E_2 : & 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30 \\ E_3 : & -x_2 + 4x_3 = -24 \end{aligned}$$

Gauss-Seidelenari dagozkion ekuazioak ondokoak dira ($k = 1, 2, \dots$):

$$x_1^{(k)} = -0.75x_2^{(k-1)} + 6$$

$$x_2^{(k)} = -0.75x_1^{(k)} + 0.25x_3^{(k-1)} + 7.5$$

$$x_3^{(k)} = 0.25x_2^{(k)} - 6$$

SOR metodoari dagozkion ekuazioak ondokoak dira ($k = 1, 2, \dots$):

$$x_1^{(k)} = -0.25x_1^{(k-1)} - 0.9375x_2^{(k-1)} + 7.5$$

$$x_2^{(k)} = -0.9375x_1^{(k)} - 0.25x_2^{(k-1)} + 0.3125x_3^{(k-1)} + 0.9375$$

$$x_3^{(k)} = 0.3125x_2^{(k)} - 0.25x_3^{(k-1)} - 7.5$$

7 digito zehatzekiko doitasuna lortzeko Gauss-Seidelen metodoak 34 iterazio behar ditu eta SOR-enak ($w = 1.25$) 14 besterik ez. Lehenengo 7 iterazioen emaitzak ondoko taulan ikusten dira. $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$ eta $x_3^{(k)}$ Gauss-Seidelen metodoari dagozkio eta $\bar{x}_1^{(k)}$, $\bar{x}_2^{(k)}$ eta $\bar{x}_3^{(k)}$ SOR ($w = 1.25$) metodoari.

k	$x_1^{(k)}$	$\bar{x}_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\bar{x}_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\bar{x}_3^{(k)}$
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
1	5.2500000	6.3125000	3.8125000	3.5195313	-5.0468750	-6.6501465
2	3.1406250	2.6223144	3.8828125	3.9585266	-5.0292969	-4.6004238
3	3.0878906	3.1333027	3.9267578	4.0102646	-5.0183105	-5.0966864
4	3.0549317	2.9570513	3.9542236	4.0074838	-5.0114441	-4.9734897
5	3.0343323	3.0037211	3.9713898	4.0029250	-5.0071526	-5.0057135
6	3.0214577	2.9963275	3.9821186	4.0009263	-5.0044703	-4.9982822
7	3.0134111	3.0000498	3.9888241	4.0002586	-5.0027940	-5.0003486

SOR metodoari dagokion funtsezko galdera bat ondorengoa da: Zein izango da w -rik egokiena?. Nahiz eta galdera honi erantzun zehatza ematea ezinezkoa izan, kasu berezi batzuetan ondorengo teorema erabil daitezke:

Teorema(Kahan)

Baldin $a_{ii} \neq 0 \quad i = 1, \dots, n$ badira, orduan $\rho(T_\omega) \geq |\omega - 1|$. Azken emaitza honek $\rho(T_\omega) < 1 \Rightarrow 0 < \omega < 2$ esaten digu, non $T_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]$ SOR metodoaren matrizea baita.

Teorema (Ostrowski-Reich)

Baldin A matrize positibo definitua bada, orduan edozein $x^{(0)}$ hasierako hurbilketarekin SOR metodoak konbergitzeko, $0 < \omega < 2$ parametroa aukeratu behar dugu. Hala ere, hautaketa honek ez du metodoaren konbergentzia ziurtatzen.

Teorema

Baldin A matrize tridiagonala eta positibo definitua bada, orduan $\rho(T_{GS}) = [\rho(T_J)] < 1$ da eta SOR metodoaren ω -rik onena ondoko hau da:

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(T_J)]^2}}$$

eta ω -ren balio honekin $\rho(T_\omega) = \omega - 1$ da.

Adibidea

Ondoko A matrizearen SOR metodoaren ω -rik onena aurkitu:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrize hau tridiagonala eta positibo definitua da, beraz, ikusitako azken teorema aplika dezakegu:

$$T_J = D^{-1}(L + U) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.75 & 0 \\ -0.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_J - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -0.75 & 0 \\ -0.75 & -\lambda & 0.25 \\ 0 & 0.25 & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T_J - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - 0.625)$$

Beraz $\rho(T_J) = \sqrt{0.625} \approx 0.79057 \Rightarrow \omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(T_J)]^2}} \approx 1.24$

ARIKETAK

1. $x^{(0)}$ hasierako hurbilketarekin ondoko sistemeei Jacobi, Gauss-Seidel eta SOR ($\omega = 1.2$) metodoen lehenengo bi iterazio aplikatu:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -10 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0.375 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \\ \text{d)} \quad \begin{cases} 10x_1 - x_2 = 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7 \\ -x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases} & \text{e)} \quad \begin{cases} 2x_1 = 3 \\ x_1 + 1.5x_2 = 4.5 \\ -3x_2 + 0.5x_3 = 4.5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0.8 \end{cases} \\ \text{f)} \quad \begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 = -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = -11 \end{cases} & \end{array}$$