

# UNA INTRODUCCIÓN A LA CUADRATURA NUMÉRICA

F. VADILLO

RESUMEN. Por razones históricas el cálculo aproximado de integrales se conoce con el nombre de *cuadratura* mientras que el término *integración* se reserva para la resolución de ecuaciones diferenciales. En esta breve introducción primero se presentan los métodos clásico: fórmulas del punto medio, trapecios y regla de Simpson y se estudian los errores cometidos. Después se presenta las reglas de cuadratura compuestas, las fórmulas gaussianas y se finaliza estudiando los algoritmos de la cuadratura adaptativa.

## ÍNDICE

1. Introducción	1
2. Métodos habituales para obtener fórmulas de cuadratura	2
2.1. El método de interpolación	2
2.2. El método directo	3
2.3. El método de desarrollo de Taylor	3
3. Error de cuadratura	4
3.1. El teorema del núcleo de Peano	5
4. Reglas de cuadratura compuestas	6
5. Cuadratura adaptativa	7
6. Cuadratura Gaussiana	9
6.1. Fórmulas de Randau y Lobatto	11
Referencias	11

## 1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudiarán métodos para el cálculo aproximado de integrales definidas

$$(1.1) \quad \mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

donde  $f$  es una función integrable en el intervalo  $[a, b]$ . Esta necesidad surge por varias razones:

- Sólo una pequeña parte de las funciones elementales tienen primitivas también elementales. Considere por ejemplo la función  $\exp(-x^2)$ .

- Aunque exista la función primitiva, llegar a ella puede resultar tedioso, piense por ejemplo en las funciones racionales, o también pueden depender de cambios de variables más o menos ingeniosos.
- En muchas aplicaciones sólo se tiene una tabla de valores de  $f$  o una subrutina que permite evaluar  $f$  en puntos de su dominio.

La mayoría de las aproximaciones numéricas llamadas **fórmulas de cuadratura** son de la forma

$$(1.2) \quad \mathcal{I}_{n+1}(f) = \sum_{j=0}^n \alpha_j f(x_j),$$

donde los  $\alpha_j$  son los **coeficientes ó pesos** y los puntos  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  son los **nodos** y el **error de cuadratura** es

$$(1.3) \quad \mathcal{E}_{n+1}(f) = \mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_{n+1}(f).$$

Para conocer la calidad de una fórmula de cuadratura se define su **grado de precisión ó exactitud**. Se dice que una fórmula de cuadratura tiene grado de exactitud  $M \geq 0$  si calcula exactamente la integral para cada polinomio de grado menor o igual que  $M$ , pero no es exacta para al menos un polinomio de grado  $M + 1$ .

## 2. MÉTODO HABITUALES PARA OBTENER FÓRMULAS DE CUADRATURA

Suponiendo que los nodos  $x_0, \dots, x_n$  están dados, por ejemplo si la función sólo se conoce en una table. Para elegir los pesos se puede hacer de dos maneras

**2.1. El método de interpolación.** Se construye el polinomio de interpolación pasando por los nodos

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) L_j(x),$$

y después

$$(2.1) \quad \mathcal{I}_{n+1}(f) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \int_a^b L_j(x) dx,$$

con los pesos  $\alpha_j = \int_a^b L_j(x) dx$  para  $j = 0, \dots, n$ . Estas fórmulas de cuadratura se las denomina **formulas interpolatorias**.

**Teorema 2.1.** *Dados los nodos  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , la fórmula interpolatoria tiene un grado de exactitud mayor o igual que  $n$ .*

*Demostración.* Si  $f$  es un polinomio de grado menor o igual que  $n$ , su polinomio interpolador es también  $f$  y por tanto  $\mathcal{I}(f) = \mathcal{I}_{n+1}(f)$ .  $\square$

**Ejemplo 2.2. Fórmula del rectángulo**

$$\mathcal{I}_R(f) = (b - a) f(a).$$

**Ejemplo 2.3. Fórmula del punto medio**

$$\mathcal{I}_{PM}(f) = (b - a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

**Ejemplo 2.4. Fórmula de los trapecios**

$$\mathcal{I}_T(f) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)).$$

**2.2. El método directo.** Otra opción es determinar los pesos directamente escribiendo el sistema de ecuaciones para los polinomios  $1, x, x^2, \dots, x^n$  que resulta

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n &= b - a, \\ \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n &= \frac{b^2 - a^2}{2}, \\ &\vdots \\ \alpha_0 x_0^n + \alpha_1 x_1^n + \dots + \alpha_n x_n^n &= \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}, \end{aligned}$$

un sistema con una única solución porque su matriz es de Valmermonde con abscisas dos a dos distintas. De este modo se ha probado el siguiente teorema

**Teorema 2.5.** *Dados  $n+1$  nodos distintos dos a dos, existen unos únicos pesos  $\alpha_j$  para que la regla (1.2) tenga un grado de exactitud mayor o igual a  $n$*

además,

**Teorema 2.6.** *Dados  $n+1$  nodos distintos dos a dos, la regla (1.2) tiene un grado de exactitud mayor o igual a  $n$  ssi es interpolatoria.*

Es interesante destacar que en otras situaciones este método puede dar fórmulas que no son interpolatorias, por ejemplo usando datos de la derivada de la función en los nodos.

**Ejemplo 2.7.** Trate de encontrar una aproximación a  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  con los datos  $f(-1), f(0), f(1), f'(-1), f'(0)$  y  $f'(1)$ .

**2.3. El método de desarrollo de Taylor.** En este tercer método se supone que la función  $f$  es suficientemente diferenciable para desarrollar por Taylor hasta donde sea necesario. Ilustraremos este método para obtener la **regla de Simpson**:

$$\mathcal{I}_S(f) = A f(a) + B f\left(\frac{a+b}{2}\right) + C f(b).$$

Llamando  $c = \frac{a+b}{2}$  y  $h = \frac{b-a}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(f) &= \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left[ f(c) + (x-c)f'(c) + \frac{(x-c)^2}{2}f''(c) + \dots \right] dx \\ &= 2h f(c) + \frac{h^3}{3}f''(c) + \frac{h^5}{60}f^{(4)}(c) + \dots \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_S(f) &= A f(a) + B f(c) + C f(b) \\ &= (A+B+C) f(c) + h(-A+C) f'(c) + \frac{h^2}{2}(A+C) f''(c) + \\ &\quad \frac{h^3}{6}(-A+C) f'''(c) + \frac{h^4}{24}(A+C) f^{(4)}(c) + \dots, \end{aligned}$$

e identificando coeficientes se tiene

$$\begin{aligned} 2h &= A + B + C, \\ 0 &= -A + C, \\ \frac{2}{3}h &= A + C, \\ 0 &= -A + C, \\ \frac{2}{5}h &= A + C, \\ &\vdots \end{aligned}$$

con la solución  $A = C = \frac{h}{3}$  y  $B = \frac{4h}{3}$ . Por tanto la **regla de Simpson** es:

$$\mathcal{I}_S(f) = \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

### 3. ERROR DE CUADRATURA

Suponiendo que se ha utilizado una fórmula interpolatoria para aproximar la integral (1.1), el error cometido

$$\mathcal{E}_{n+1}(f) = \mathcal{I}(f) - \mathcal{I}(P_n) = \int_a^b (f(x) - P_n(x)) dx,$$

luego

$$|\mathcal{E}_{n+1}(f)| \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P_n(x)|,$$

de modo que si  $P_n$  es una buena aproximación a  $f$ , entonces  $\mathcal{I}_{n+1}(f)$  es una buena aproximación a  $\mathcal{I}(f)$ .

Por otra parte, usando el error de interpolación  $f(x) - P_n(x)$  en la forma de Newton se tiene

$$\mathcal{E}_{n+1}(f) = \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x] \Pi(x) dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \Pi(x) dx,$$

donde  $\Pi(x) = (x-x_0) \cdots (x-x_n)$ . Entonces si  $\Pi(x)$  no cambia de signo en  $[a, b]$  y  $f^{(n+1)}$  es continua, se puede aplicar el teorema del valor medio del cálculo integral para obtener

$$\mathcal{E}_{n+1}(f) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!} \int_a^b \Pi(x) dx,$$

con  $\min\{x_j, a\} < \alpha < \max\{x_j, b\}$ .

**Ejemplo 3.1.** Para la **fórmula del rectángulo**

$$(3.1) \quad \mathcal{E}_R(f) = \frac{f'(\alpha)}{(1)!} \int_a^b (x-a) dx = f'(\alpha) \frac{(b-a)^2}{2}.$$

**Ejemplo 3.2.** Para la **regla de los trapecio**

$$(3.2) \quad \mathcal{E}_T(f) = -f''(\alpha) \frac{(b-a)^3}{12}.$$

Cuando la función  $\Pi(x)$  cambia de signo en  $[a, b]$ , este argumento no sirve y se debe acudir a otros métodos si se desea expresar el error en términos de derivadas.

**3.1. El teorema del núcleo de Peano.** Peano descubrió un teorema que permite expresar el error para una clase muy amplia de problemas numéricos. Se considera el espacio  $\mathcal{C}^{n+1}[a, b]$  donde se define una forma lineal

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f) &= \int_a^b [a_0(x)f(x) + a_1(x)f'(x) + \cdots + a_n(x)f^{(n)}(x)] dx \\ &+ \sum_{j=1}^n b_{j,0}f(x_j) + \sum_{j=1}^n b_{j,1}f'(x_j) + \cdots + \sum_{j=1}^n b_{j,n}f^{(n)}(x_j),\end{aligned}$$

donde las funciones  $a_j(x)$  son continuas a trozos y los nodos  $x_j \in [a, b]$ .

**Teorema 3.3.** Si  $\mathcal{L}(p) = 0$  para todo polinomio en  $\Pi_n$ , entonces para cada  $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$

$$\mathcal{L}(f) = \int_a^b f^{(n+1)}(t) K(t) dt,$$

donde  $K(x)$  es el núcleo de Peano definido de la forma

$$K(t) = \frac{1}{n!} \mathcal{L}_x[(x-t)_+^n],$$

y el subíndice denota que es aplicado como función de  $x$  de la forma

$$\begin{aligned}(x-t)_+^n &= (x-t)^n, & x &\geq t, \\ (x-t)_+^n &= 0, & x &< t.\end{aligned}$$

*Demostración.* Ver [2, pag. 123]. □

**Corolario 3.4.** Si además de las hipótesis del teorema anterior, el núcleo  $K(t)$  no cambia de signo en  $[a, b]$  entonces para cada  $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$  existe un  $\xi \in [a, b]$  tal que

$$\mathcal{L}(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \mathcal{L}(x^{n+1}).$$

*Demostración.* Por el teorema del valor medio

$$\mathcal{L}(f) = f^{(n+1)}(\xi) \int_a^b K(t) dt,$$

que aplicado a  $x^{n+1}$  da

$$\mathcal{L}(x^{n+1}) = (n+1)! \int_a^b K(t) dt,$$

de donde se concluye de manera inmediata. □

**Ejemplo 3.5.** Se considera la **regla del punto medio** por lo que

$$\mathcal{E}_{PM}(f) = \int_a^b f(x) dx - (b-a) f(c), \quad \text{con } c = \frac{a+b}{2}.$$

Su núcleo de Peanos es

$$K(t) = \int_a^b (x-t)_+ dx - (b-a) (c-t)_+,$$

De modo que

$$\begin{aligned} \text{Si } t \geq c &\Rightarrow K(t) = \frac{1}{2} (b-t)^2, \\ \text{Si } t \leq c &\Rightarrow K(t) = \frac{1}{2} (t-a)^2, \end{aligned}$$

que al no cambiar el signo se puede aplicar el corolario y calculando

$$\mathcal{L}(x^2) = \int_a^b x^2 dx - (b-a) \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{12} (b-a)^3,$$

con lo que se llega a la expresión del error

$$(3.3) \quad \mathcal{E}_{PM}(f) = \frac{f''(\xi)}{24} (b-a)^3.$$

**Ejemplo 3.6.** Por un procedimiento parecido el error para la **regla de Simpson** es

$$(3.4) \quad \mathcal{E}_S(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5.$$

#### 4. REGLAS DE CUADRATURA COMPUESTAS

Para construir fórmulas de cuadratura compuesta se elige una partición del intervalo de integración  $[a, b]$  de la forma

$$a = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = b,$$

de forma que

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} f(x) dx.$$

y después se aplica una cuadratura para cada integral del segundo miembro. Generalmente los sub intervalos son iguales de forma que  $z_j = z_0 + j h$ .

Aplicada por ejemplo la **regla de los trapecios** en cada sub intervalo resulta

$$\frac{h}{2} [ f(z_0) + 2 f(z_1) + \cdots + 2 f(z_{n-1}) + f(z_n) ].$$

Para conocer su error se usaría la expresión (3.2) con el resultado

$$\mathcal{E}_{TC}(f) = \sum_{j=0}^{n-1} -\frac{h^3}{12} f''(\xi_j), \quad \text{con } z_j \leq \xi_j \leq z_{j+1}.$$

Lo que demostraría que si  $f''$  está acotada,

$$|\mathcal{E}_{TC}(f)| \leq \frac{h^3}{12} n \|f''\|_\infty = \frac{h^2}{12} (b-a) \|f''\|_\infty = \mathcal{O}(h^2).$$

De igual manera con  $n = 2m$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{z_{2j}}^{z_{2j+2}} f(x) dx.$$

aplicando la regla de Simpson en cada subintervalo se tiene la **regla de Simpson compuesta**

$$I_{SC}(a, b, f, h) = \frac{h}{3} [ f(z_0) + 4 f(z_1) + 2 f(z_2) + 4 f(z_3) + \cdots + 4 f(z_{n-1}) + f(z_n) ],$$

también escriba de la forma

$$I_{SC}(a, b, f, h) = \frac{h}{3} \left[ f(a) + f(b) + 2 \left( \sum_{j=0}^{m-1} f(z_{2j+1}) + \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) \right) \right],$$

y con la acotación de error

$$|\mathcal{E}_{SC}(f)| \leq \frac{b-a}{180} h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty} = \mathbf{O}(h^4).$$

## 5. CUADRATURA ADAPTATIVA

Considere por ejemplo, que necesite integrar la función  $f(x) = \cos(x^3)^{200}$  en el intervalo  $0 \leq x \leq 3$  representada en la Figura 1 con un error del orden de  $10^{-6}$ . Si utilizara la regla de Simpson y estimara el paso  $h$  en su expresión de error (3.4), necesitaría del orden de 19200 sub-intervalos que evidentemente es una exageración para calcular el área dibujada encerrada por la gráfica de la función. Lo razonable para este problema sería utilizar sub-intervalos pequeños en la zona de los picos y sub-intervalos muchos mayores para las mesetas. Esta idea es la que desarrolla la técnicas de cuadratura adaptativas que se comentan.

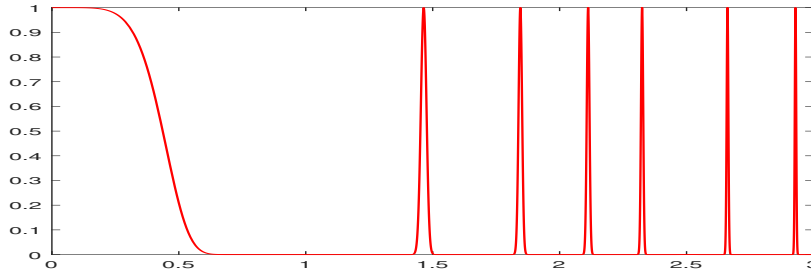


FIGURA 1. Función  $\cos(x^3)^{200}$ .

Suponga que quiere aproximar una integral definida  $\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x) dx$  utilizando una fórmula de cuadratura  $\mathcal{Q}(f)$  tal que

$$(5.1) \quad |\mathcal{Q}(f) - \mathcal{I}(f)| < Tol,$$

donde  $Tol$  representan una tolerancia dada.

Lo primero será realizar alguna estimación del error

$$\mathcal{E}(f; h) = K h^q + O(h^{q+1}),$$

suponiendo que  $q$  es el orden de la fórmula de cuadratura. Una técnica clásica es evaluar la integral con dos pasos diferentes, por ejemplo  $h$  y  $h/2$  y actuar de la

siguiente manera: si se utiliza una fórmula de los trapecios compuesta se tiene

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{h}{2} [f(a) + 2f(a+h) + \cdots + 2f(b-h) + f(b)], \\ R_2 &= \frac{h}{4} [f(a) + 2f(a+h/2) + 2f(a+h) + \cdots + 2f(b-h/2) + f(b)], \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(f) - R_1 &\approx K h^2, \\ \mathcal{I}(f) - R_2 &\approx K \left(\frac{h}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

es decir

$$\mathcal{I}(f) - R_2 \approx \frac{1}{4} (\mathcal{I}(f) - R_1).$$

por lo que

$$\mathcal{I}(f) - R_1 = (\mathcal{I}(f) - R_2) + (R_2 - R_1) \approx \frac{1}{4} (\mathcal{I}(f) - R_1) + (R_2 - R_1),$$

es decir

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(f) - R_1 &\approx \frac{4}{3} (R_2 - R_1), \\ \mathcal{I}(f) - R_2 &\approx \frac{1}{3} (R_2 - R_1), \end{aligned}$$

que son las **estimaciones a posteriori del error**.

Para la regla de Simpson un análisis semejante daría:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(f) - S_1 &\approx \frac{16}{15} (S_2 - S_1), \\ \mathcal{I}(f) - S_2 &\approx \frac{1}{15} (S_2 - S_1) \end{aligned}$$

ver [4], [1] o también [6].

Una vez que se tienen los estimadores a posteriori de los errores se actúa de la siguiente manera: se comienza con una partición cualquiera del intervalo

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_r = b,$$

con  $h_j = x_j - x_{j-1} > 0$  se computa  $Q_j \approx I_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx$  tal que

$$|I_j - Q_j| < \frac{h_j}{b-a} Tol, \quad j = 1, \dots, r,$$

esto se consigue partiendo el paso hasta cuando hiciera falta, y finalmente la aproximación  $Q_f = \sum_{j=1}^r Q_j$  evidentemente verificará la condición (5.1).

El comando **quad** implementa en MATLAB la regla de Simpson con paso adaptado, por ejemplo para función dibujada en la figura 1 el comando **quad(@f,0,3,0.000001)** devuelve la estimación 0.5316. Por otra parte **quadgui** de [5] muestra la evolución del algoritmo y los sub-intervalos finales.

Otro ejemplo sería dibujar las espirales de Fresnel (figura 2) definidas por sus ecuaciones paramétricas:

$$(5.2) \quad x(t) = \int_0^t \cos(s^2) ds, \quad y(t) = \int_0^t \sin(s^2) ds.$$



Con el programa

```
%Fresnel.m
%
n=1000;
x=zeros(1,n); y=x;
t=linspace(-4*pi,4*pi,n+1);
for j=1:n-1
    x(j)= quad(@(x)cos(x.^2),t(j),t(j+1),1e-3);
    y(j)= quad(@(x)sin(x.^2),t(j),t(j+1),1e-3);
end
x=cumsum(x); y=cumsum(y);
plot(x,y)
grid on
```

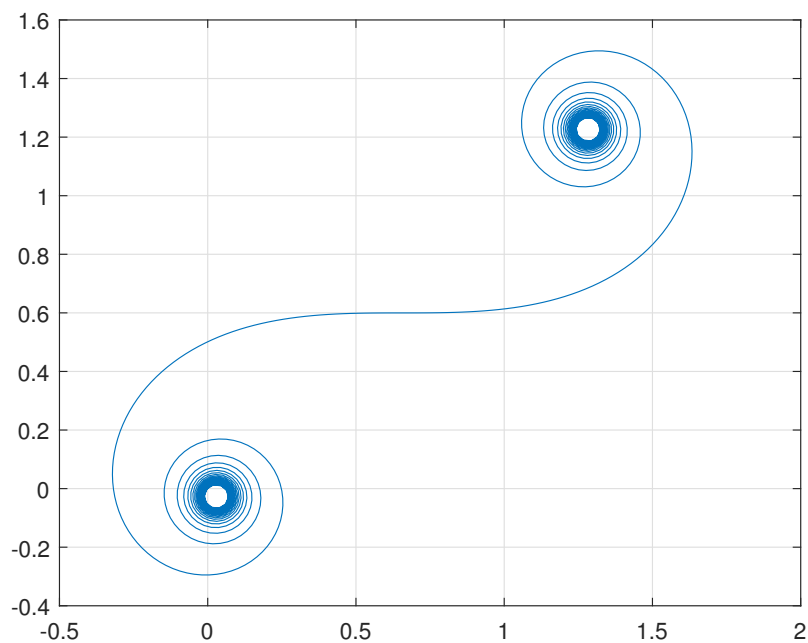


FIGURA 2. Espirales de Fresnel

## 6. CUADRATURA GAUSSIANA

Hasta ahora en las fórmulas de cuadratura (1.2) se suponía que los nodos  $x_j$  estaban fijados y lo que se podía decidir son los  $n + 1$  pesos  $\alpha_j$  por lo que conseguían fórmulas de exactitud  $n$ . Si también se pudieran elegir los  $n + 1$  nodos  $x_0, \dots, x_n$ ,

como se dispone de  $2n + 2$  parámetros, se buscarían fórmulas exactas para los polinomios  $1, x, \dots, x^{2n+1}$  que son las denominadas fórmulas de cuadratura Gaussianas estudiadas en [7].

Evidentemente, los fórmulas Gaussianas son interpolatorias por lo que

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^n \alpha_j f(x_j) + \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x] \Pi_{n+1}(x) dx,$$

con  $\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$ . Por tanto, los nodos deben verificar que

$$(6.1) \quad \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x] \Pi_{n+1}(x) dx = 0,$$

para  $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n+1}$ .

Por otra parte, si  $p(x) \in \mathcal{P}_m$ , es decir, es un polinomio de grado  $m$ , entonces

$$\begin{aligned} x &\mapsto p[x_0, x] = \frac{p(x) - p(x_0)}{x - x_0} \in \mathcal{P}_{m-1}, \\ x &\mapsto p[x_0, x_1, x] \in \mathcal{P}_{m-2}, \\ x &\mapsto p[x_0, x_1, x_2, x] \in \mathcal{P}_{m-3}, \\ &\vdots \\ x &\mapsto p[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \in \mathcal{P}_{m-(n+1)}, \end{aligned}$$

Sustituyen entonces  $x^{n+1}, \dots, x^{2n+1}$  en (6.1) se concluye que  $\Pi_{n+1}(x)$  es un polinomio ortogonal a todos los polinomios de grados menor o igual que  $n$ , es decir

$$\Pi_{n+1}(x) \perp \mathcal{P}_n.$$

Además, (6.1) no puede ser cierta para polinomios de grado  $\leq 2n + 2$  pues entonces  $\Pi(x)$  sería ortogonal a todo polinomio de grado  $\leq n + 1$  lo que es absurdo. En conclusión:

**Teorema 6.1.** *Una fórmula de cuadratura (1.2) usando  $n + 1$  nodos puede tener grado de precisión  $2n + 1$ . Además, el grado máximo se alcanza únicamente cuando usa fórmulas interpolatorias y los nodos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  son los ceros del polinomio  $\Pi_{n+1} = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$  el  $n + 1$ -ésimo polinomio ortogonal en  $(a, b)$ .*

Además, si  $x_0, x_1, \dots, x_n$  son los ceros de  $\Pi_{n+1}(x)$ , entonces sus polinomios de Lagrange son

$$L_j(x) = \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x - x_j) \Pi'_{n+1}(x_j)},$$

y los pesos

$$(6.2) \quad \alpha_j = \frac{1}{\Pi'_{n+1}(x_j)} \int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x - x_j)} dx,$$

para  $j = 0, \dots, n$ .

**Teorema 6.2.** *Los pesos  $\alpha_j$  de la expresión (6.2) son positivos.*

*Demostración.* Ver notas. □

En cuanto al error de cuadratura se demuestra el siguiente teorema:

**Teorema 6.3.** *Si la función  $f$  tiene  $2n + 2$  derivadas continuas en  $[a, b]$ , el error de cuadratura de la fórmula Gaussiana es*

$$\mathcal{E}_{n+1}(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b \Pi_{n+1}^2(x) dx.$$

*Demostración.* Ver notas. □

**6.1. Fórmulas de Randau y Lobatto.** También se pueden considerar fórmulas de cuadratura con  $(n+1) + (m+1)$  del tipo

$$(6.3) \quad \mathcal{I}_{(n+1)+(m+1)}(f) = \sum_{j=0}^n \alpha_j f(x_j) + \sum_{j=0}^m \beta_j f(y_j),$$

con los nodos  $y_j$  fijos y los otros  $x_j$  a elegir. En este caso, el orden que cabe esperar es  $2n + m + 1$ .

Los casos más conocidos son

- Fórmulas de Gauss:  $m = 0$ .
- Fórmula de Randau:  $m = 1, y_1 = a$ .
- Fórmula de Lobatto:  $m = 2, y_1 = a, y_2 = b$ .

Ver [3] para un detallado análisis.

## REFERENCIAS

1. U.M. Ascher and C. Greif, *A First Course in Numerical Methods*, SIAM, 2011.
2. R. Bulirsch and J. Stoer, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer, 1980.
3. P.J. Davis and P. Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration. Second Edition*, Academic Press, 1984.
4. M.H. Holmes, *Introduction to Scientific Computing and Data Analysis*, Springer, 2016.
5. C.B. Moler, *Numerical Computing with MATLAB*, SIAM, 2004.
6. R. Sacco, F. Saleri, and A. Quarteroni, *Numerical Mathematics*, Springer, 2000.
7. J.M. Sanz Serna, *La cuadratura gaussiana según Gauss*, <https://arxiv.org/pdf/1807.03506.pdf> (2018).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS DE LA UPV/EHU  
 Email address: fernando.vadillo@ehu.eus