

El teorema de los 4 colores

A student of mine asked me to day to give him a reason for a fact which I did not know was a fact - and do not yet. He says that, if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured - four colours may be wanted but not more - the following is his case in which four are wanted

A B C D are names of colours



Query cannot a necessity for five or more be invented

Part of Augustus De Morgan's letter to Sir William Rowan Hamilton, 23 October 1852.



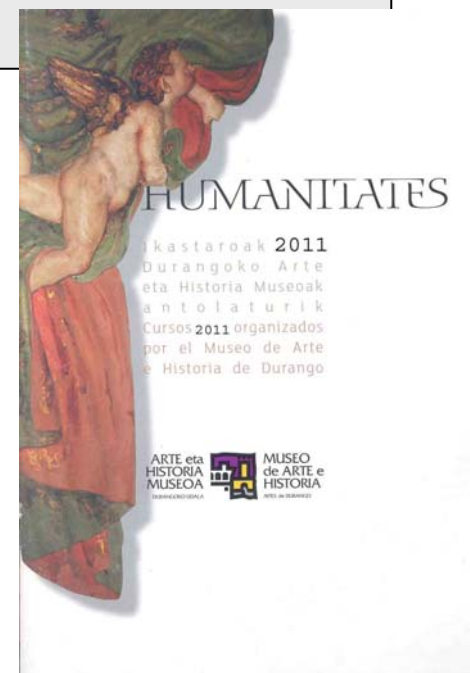
Wolfgang Haken

Smote the Kraken

One! Two! Three! Four!

Quoth he: "the monster is no more".

W.T. Tutte



Durango, 21 de febrero de 2011

Guión de la charla

☺ Historia de la conjetura de los cuatro colores:
de 1852-1996

La “prueba” errónea de Kempe... y sus buenas ideas

Un siglo más tarde: llega la “demostración” con ayuda de ordenador

¿Está realmente resuelta la conjetura?

Fechas destacables

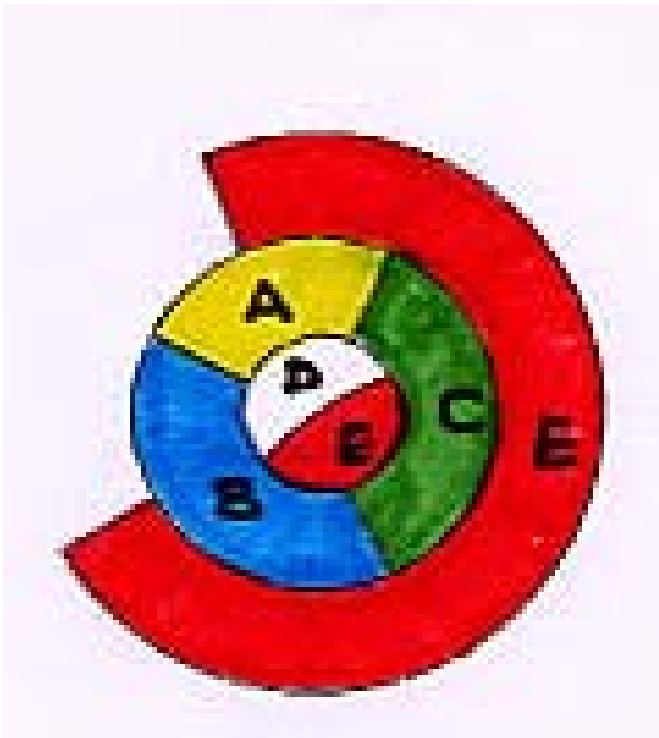
- **1852**: **Francis Guthrie** plantea el problema a su hermano **Frederick** y éste a **Augustus de Morgan**.
- **1878**: **Arthur Cayley** difunde el enunciado de la conjetura en los *Proc. Royal Geographical Soc.*
- **1879**: Sir **Alfred Bray Kempe** publica su demostración.
- **1890**: **Percy Heawood** descubre un error insuperable en la prueba dada por Kempe.
- **1913**: **George Birkhoff** introduce la noción de *configuración reducible*.

Fechas destacables

- **1960**: Se introduce el llamado *método de descarga*.
- **1969**: Avances de **Heinrich Heesch** en reducibilidad y obtención de conjuntos inevitables de configuraciones.
- **1976**: **Ken Appel** y **Wolfgang Haken** prueban con ayuda de un ordenador que sus 1.482 configuraciones son reducibles (50 días de cálculo).
- **1996**: **N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour** y **R. Thomas** mejoran la demostración con ayuda de ordenador (sólo 633 configuraciones) y automatizan la prueba de la *inevitabilidad*.

¿Qué dice la conjetura?

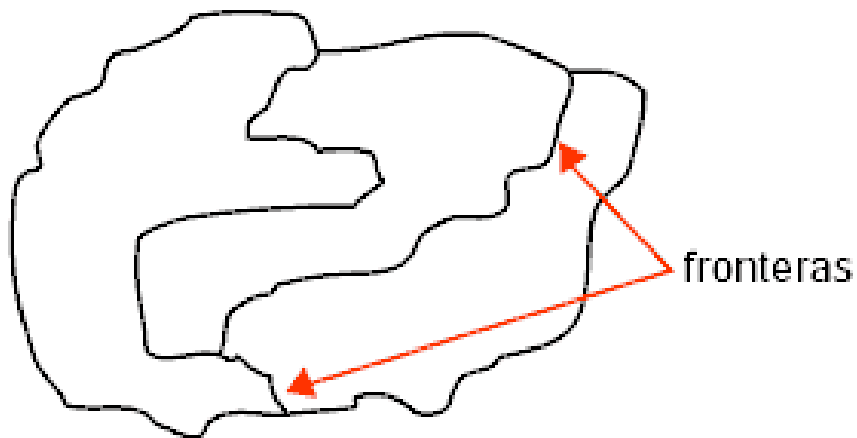
Bastan 4 colores para colorear un mapa geográfico plano, de modo que dos países con **frontera** común tengan diferente color.



Un mapa es conexo (de una pieza) y cada una de sus regiones también es conexa, es decir, no se admite una figura como la adjunta.

¿Qué dice la conjetura?

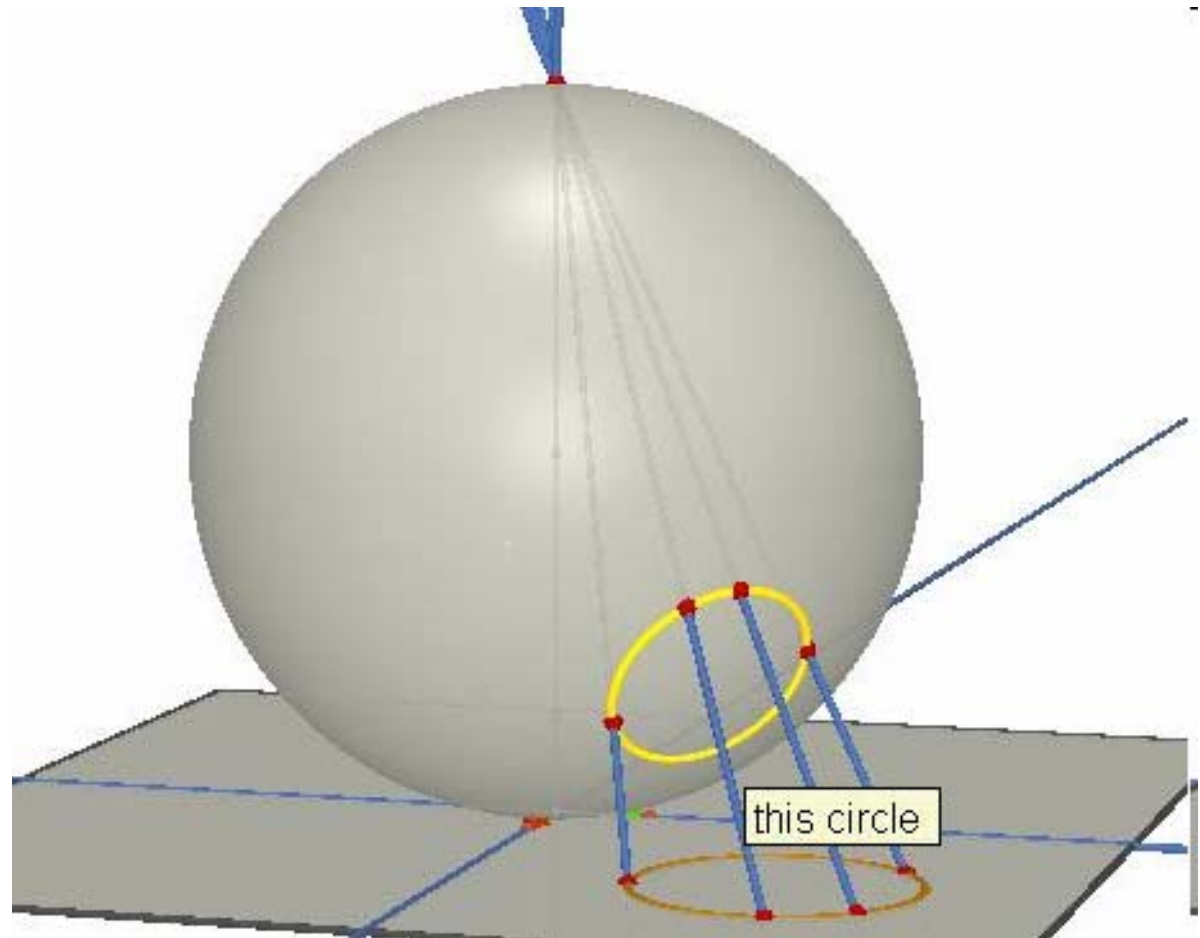
Dos regiones no pueden tocarse sólo en un punto, y así, se pueden ignorar regiones con una única línea frontera.



Es un **problema topológico**: no importa la forma de las regiones, sino como están colocadas unas respecto a otras.

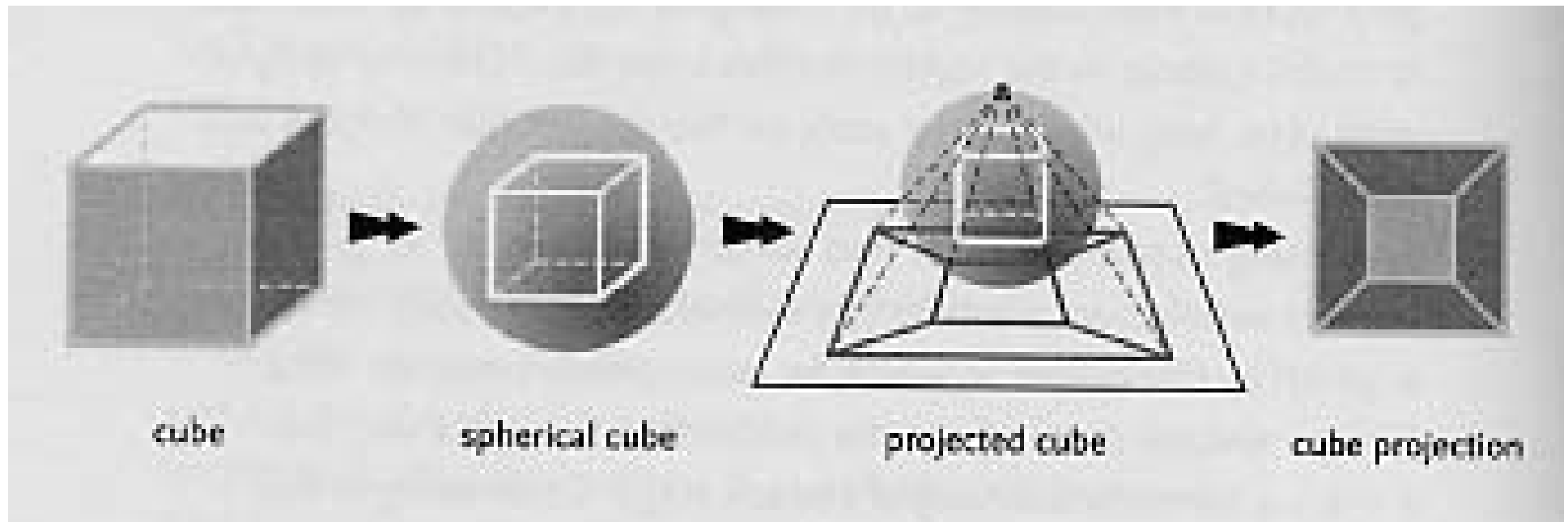
Mapas esféricos

La conjetura de 4-coloreado sobre mapas planos equivale al problema de 4-coloreado sobre mapas esféricos... basta con proyectar estereográficamente.



La propiedad fundamental: la fórmula de Euler

Paso de poliedros a mapas: se infla el poliedro sobre una esfera, se proyecta estereográficamente y se tiene el poliedro proyectado sobre el plano.

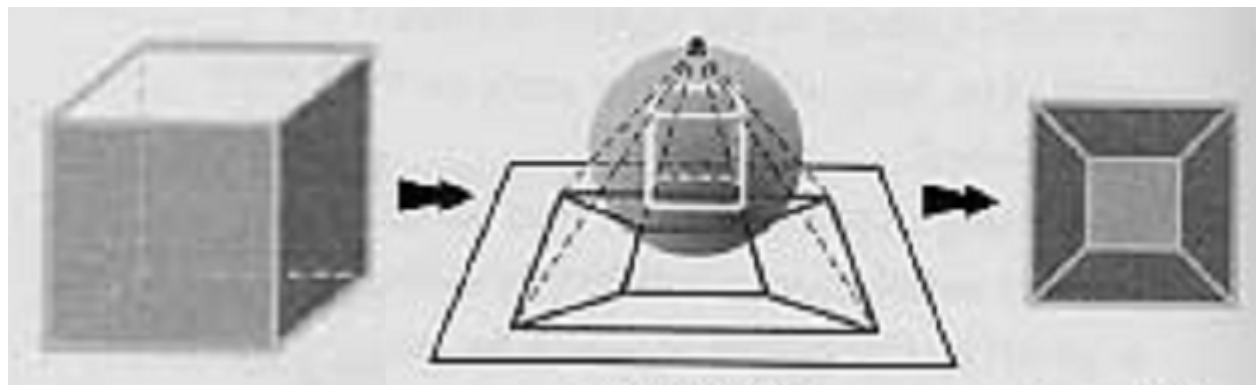


La propiedad fundamental: la fórmula de Euler

La *fórmula de Euler* para poliedros:

$$\text{Núm(caras)} - \text{Núm(aristas)} + \text{Núm(vértices)} = 2$$

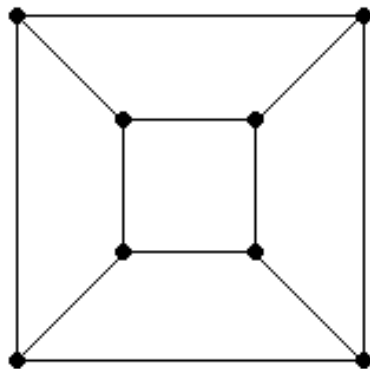
$$\text{CUADRADO: } 6 - 12 + 8 = 2$$



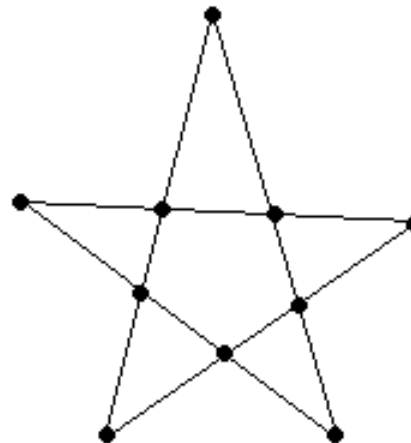
La propiedad fundamental: la fórmula de Euler

Puede hablarse de la *fórmula de Euler para mapas* (sin olvidarse de la región exterior):

$$\text{Núm(regiones)} - \text{Núm(líneas frontera)} + \text{Núm(puntos encuentro)} = 2$$



$$6 - 12 + 8 = 2$$



$$7 - 15 + 10 = 2$$

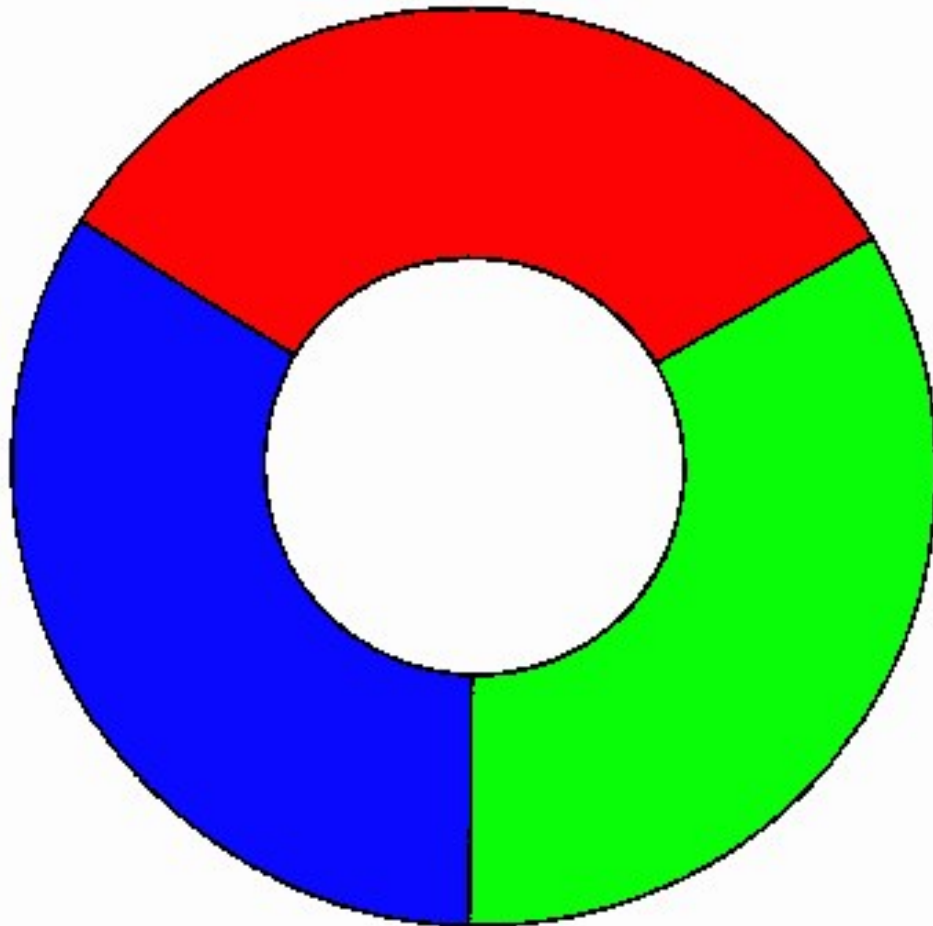
Francis Guthrie

Francis Guthrie (1839-1899) abogado y botánico, observa que puede colorear un mapa complejo de los cantones de Inglaterra con 4 colores..

En 1852, enuncia el problema a su hermano Frederick (University College London) y a éste a **Augustus de Morgan**.



Francis Guthrie observa que 3 colores no son suficientes, gracias al que denomina ***diagrama crítico***:



Francis Guthrie va a vivir en 1861 a Sudáfrica, donde trabaja como profesor de matemáticas. Es un botánico entusiasta y estudia la flora local. Tres especies raras llevan su nombre: *Cyrtanthus guthrieae*, *Gladiolous guthriei* y *Homoglossum guthriei*.

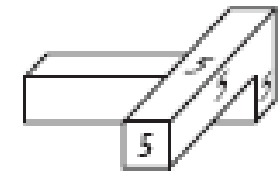
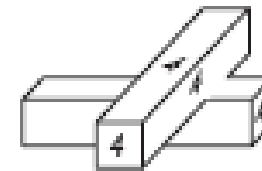
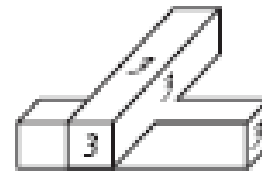
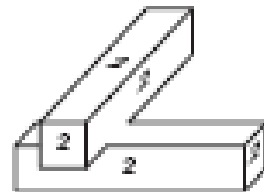
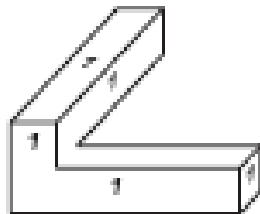
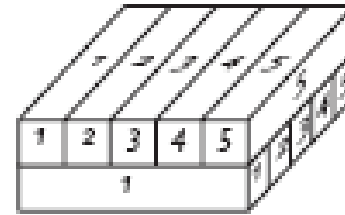
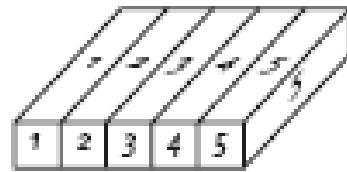
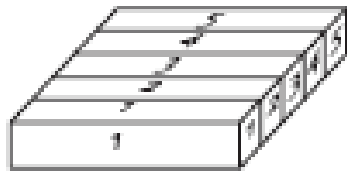


Frederick Guthrie



Frederick Guthrie, fundador de la Physical Society en 1874, fue el primero en observar que el problema de los 4 colores no se podía generalizar a dimensión 3.

En efecto, según un ejemplo posterior de **Heinrich Tietze**, en dimensión 3 se puede construir un ejemplo de mapa tridimensional que precise tantos colores como se desee...



La propuesta de Tietze consistía en tomar barras numeradas de **1** hasta **n** . Se sitúan, ordenadas de manera horizontal como muestra la figura, y sobre ellas se colocan **n** barras numeradas de **1** hasta **n** en sentido vertical. De este modo, tenemos un **mapa tridimensional** con **n** “países”, y que necesita exactamente **n** colores para no contradecir las reglas de la conjetura... En la figura se representa el caso de **$n = 5$** .

Augustus de Morgan



Augustus de Morgan (1806-1871) estaba muy interesado en la conjetura de los 4 colores y difundió entre sus colegas su importancia.

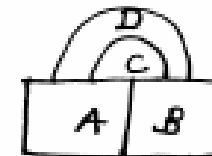
Una de las primeras personas con las que “habló” fue con el matemático y físico irlandés Sir **William Rowan Hamilton**(1805-1865), que no compartía el interés de De Morgan por el problema. Le escribe una carta el 23 de octubre de 1852...

A student of mine [Guthrie] asked me today to give him a reason for a fact which I did not know was a fact - and do not yet. He says that if a figure be anyhow divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured - four colours may be wanted, but not more - the following is the case in which four colours are wanted.

Query cannot a necessity for five or more be invented...

A student of mine asked me today to give him a reason for a fact which I did not know was a fact - and do not yet. He says that, if a figure be anyhow divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured - four colours may be wanted but not more - the following is his case in which four are wanted

A B C &c are
names of
colours



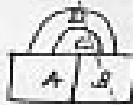
Query cannot a necessity for five or more be invented

Part of Augustus De Morgan's letter to Sir William Rowan Hamilton
23 October 1852.

My dear Hamilton

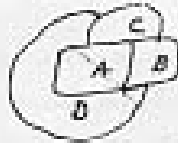
A student of mine asked me to day to give him a reason for a fact which I did not know was a fact - and so not yet. He says that, if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any kind of common boundary line are differently coloured - four colours may be wanted but not more - the following is his case in which four are wanted

A B C D are names of colours



Query cannot be necessary for 1 four or more be included for as is just at this moment, if four compartments have each boundary line in common with one of the others, three of them include the fourth, and prevent any fifth from coming in with it. If this be true, four colours will colour any possible map without any necessity for the colour meeting colour except at a point.

Now it does seem that drawing three compartments with common boundary A B C two and two - you cannot



make a fourth true boundary from all, except by including me - But it is tricky, with and I am not sure of all convolutions - What do you say? Had he it, if he had been advised to say, he would say he prepared it in colouring a map of England.



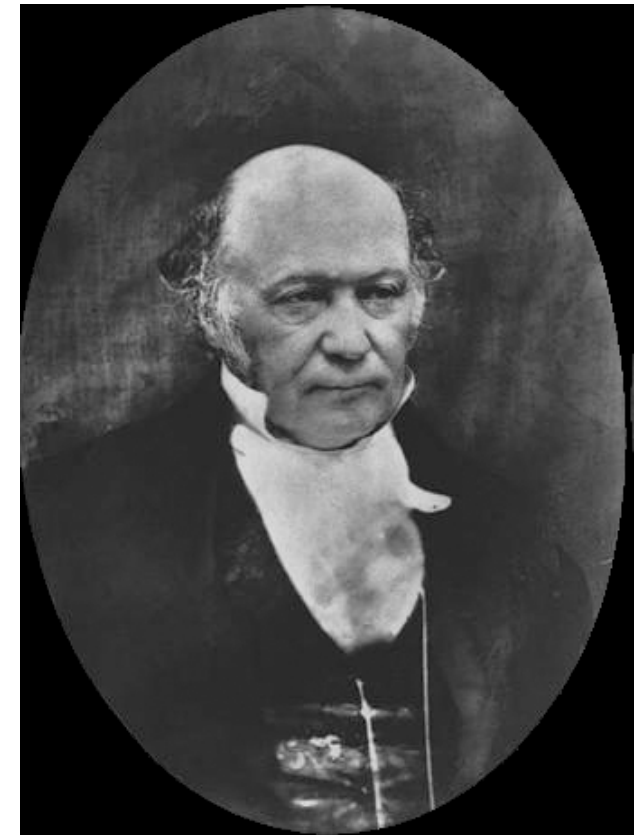
B is included

The more I think of it the more evident it seems. If you object with some very simple case which makes me out a stupid animal, I think I must do as the Thayers did. If this rule be true the following proposition of logic follows

If A B C D be four names of which any two might be conformed to by breaking down one wall of definition, then some one of the names must be a species of some name which includes nothing external to the other three

Yours truly
De Morgan

7 Oct 73
Oct 73/2.



Cuatro días después,
Hamilton le contesta:
“I am not likely
To attempt your
“quaternion” of
colours very soon”

Extract from de Morgan's original letter to Hamilton,
printed with kind permission from
The Board of Trinity College, Dublin.



Decepcionado por el desinterés de Hamilton, De Morgan se puso en contacto con otros matemáticos.

En 1853, escribe al conocido filósofo **William Whewell** (1794-1866, Cambridge), describiendo su observación como un axioma matemático.

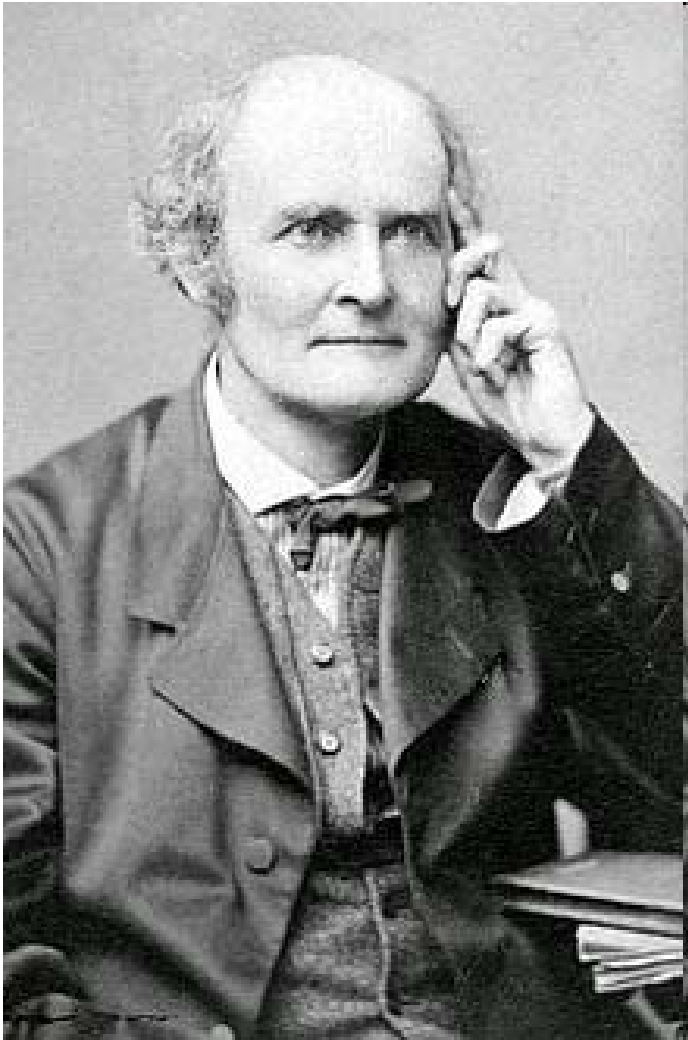


El problema de los 4 colores cruza el Atlántico y llega hasta el matemático, filósofo y lógico **Charles Sanders Peirce** (1839-1914), que da un seminario sobre la demostración... aunque nunca la escribió.

Tras la muerte de De Morgan en 1871, el problema de los 4 colores parece dormido. Peirce continúa intentando probarlo en EE.UU., pero ninguno de los amigos británicos de De Morgan lo mencionan...



Arthur Cayley



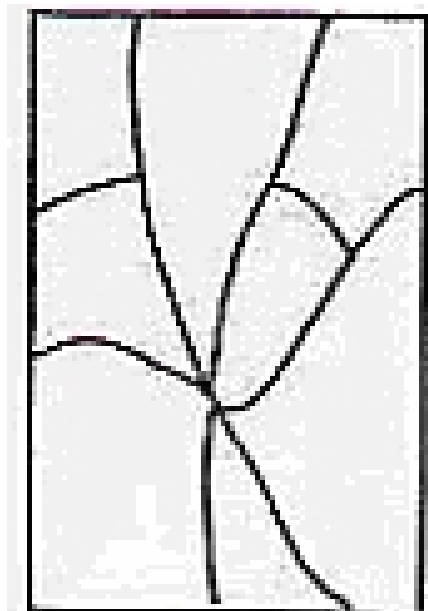
Pero, el problema no está del todo olvidado gracias a **Arthur Cayley** (1821-1895) de la Universidad de Cambridge.

Cayley ejerció de abogado, y continuó durante esa época con sus investigaciones matemáticas, en particular es uno de los padres fundadores del álgebra de matrices.

En junio de 1878, Arthur Cayley acude a un Encuentro de la London Mathematical Society, donde hace la pregunta:
“Has a solution been given of the statement that in colouring a map of a country, divided into counties, only four colours are required, so that no two adjacent counties should be painted in the same colour?”

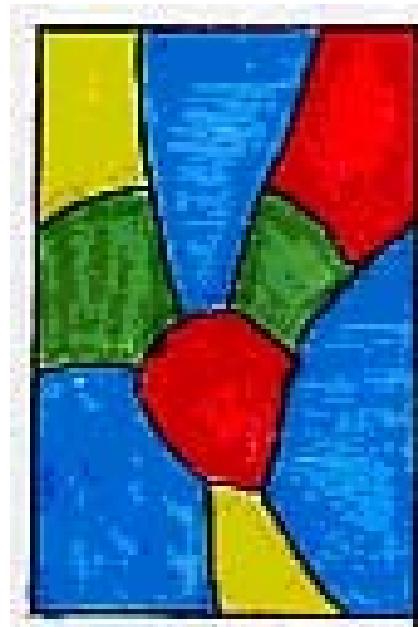
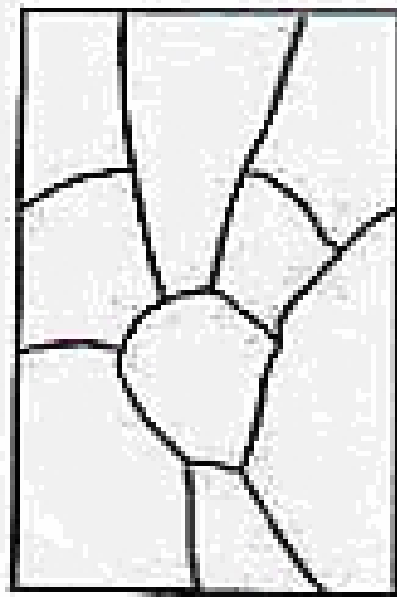
En 1879 publica una nota en los “Proc. Royal Geographical Soc.”, donde explica la dificultad del tema. Entre otros, observa que cuando se intenta probar el teorema de los 4 colores, pueden imponerse condiciones más restrictivas sobre los mapas a colorear; en particular, basta con limitarse a ***mapas cúbicos***, es decir, aquellos en los que hay exactamente 3 regiones en cada punto de encuentro: en efecto...

... en efecto, supongamos un mapa en el que hay más de 3 regiones en alguno de los puntos de encuentro. Sobre este punto puede pegarse un pequeño parche, que produce un mapa cúbico. Si se puede colorear este mapa con cuatro colores, se obtiene un 4-coloreado del mapa original, simplemente aplastando el parche en un punto...



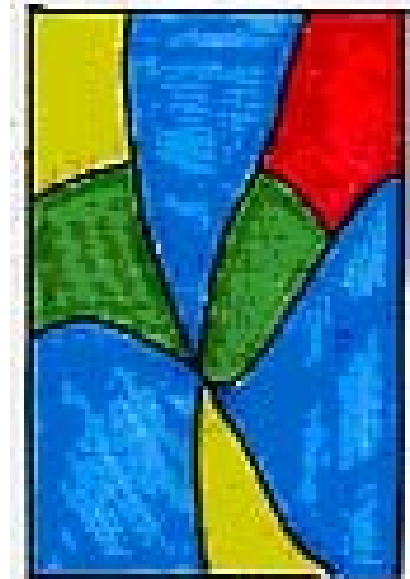
1. original

2. parcheado



3. coloreado

4. coloreado final



Guión de la charla

Historia de la conjetura de los cuatro colores:
de 1852-1996

☺ La “prueba” errónea de Kempe... y sus buenas ideas

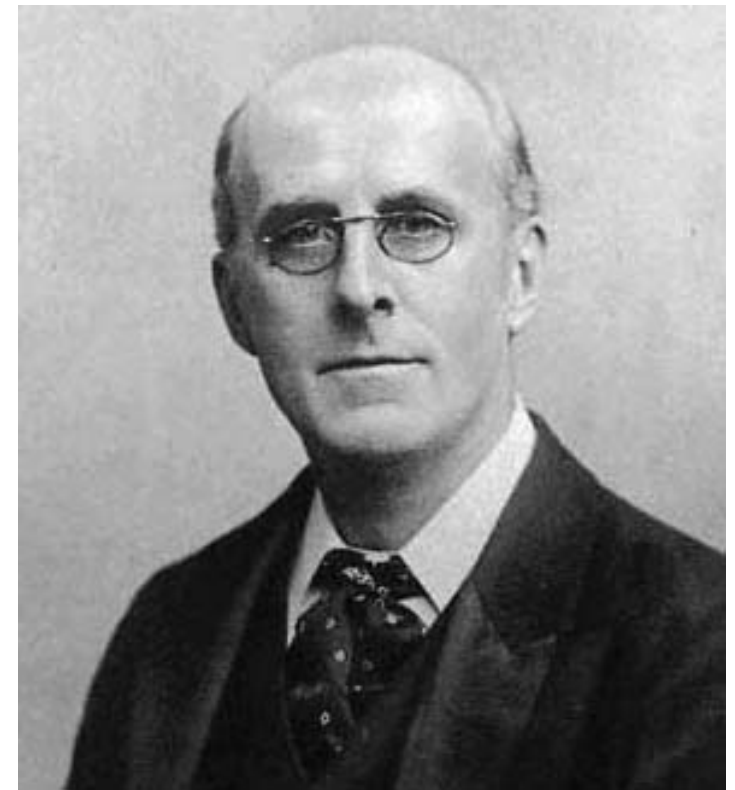
Un siglo más tarde: llega la “demostración” con ayuda de ordenador

¿Está realmente resuelta la conjetura?

Alfred Bray Kempe

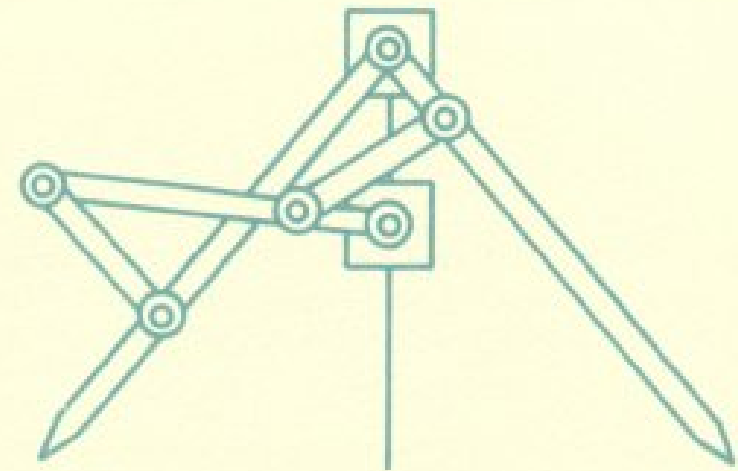
Alfred Bray Kempe (1849-1922) era un soberbio cantante. Aprendió matemáticas de Cayley y se graduó en 1872, con distinción en matemáticas.

Eligió la profesión de abogado (especializado en ley eclesiástica), dejando las matemáticas y la música (... y el alpinismo, existe un monte Kempe y un glaciar Kempe cercano en el Antártico) como pasatiempos.



En 1872 escribió su primer trabajo matemático sobre la solución de ecuaciones por medios mecánicos.

Cinco años más tarde, estimulado por un descubrimiento del ingeniero Charles Nicholas Peaucellier (1832–1913) sobre un mecanismo para trazar líneas rectas, publicó su famosa memoria sobre mecanismos titulada ***Como trazar una línea recta.***

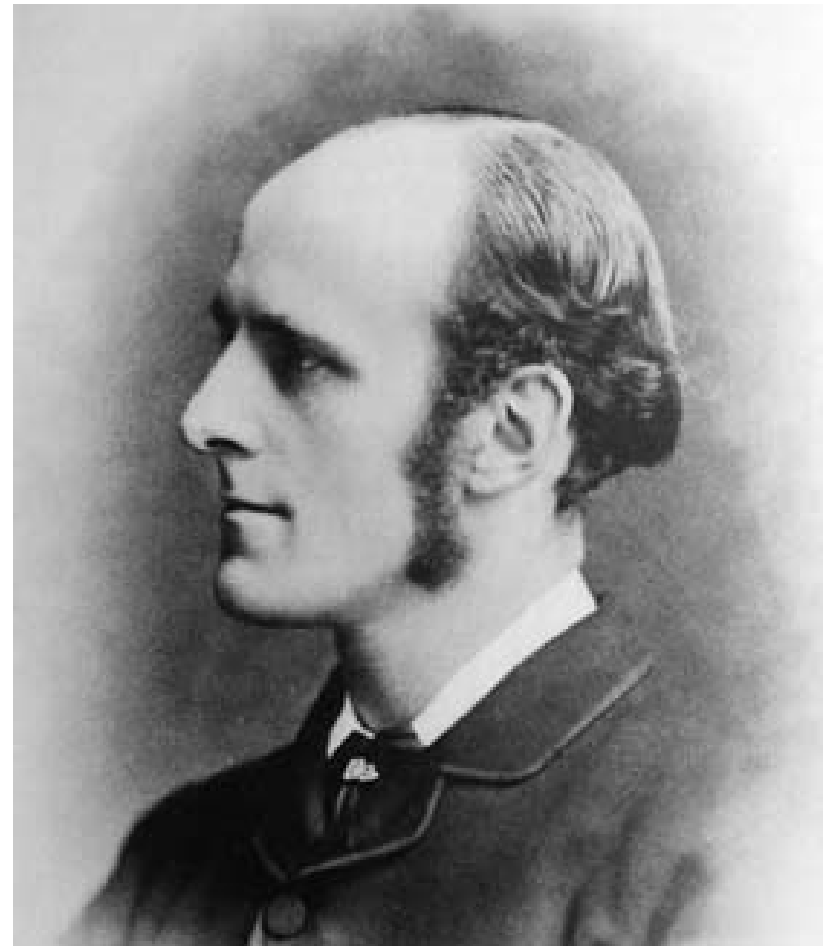


**HOW TO DRAW
A STRAIGHT LINE**

A. B. Kempe

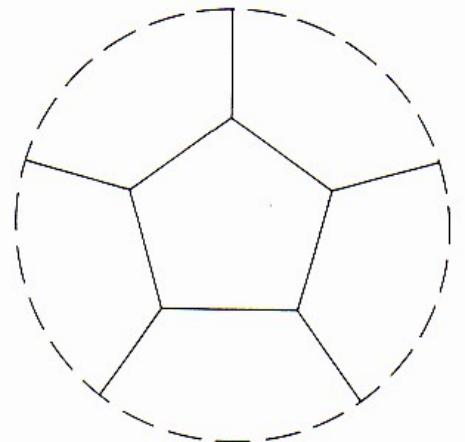
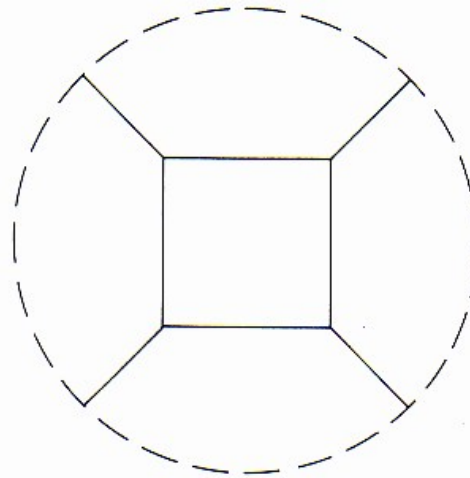
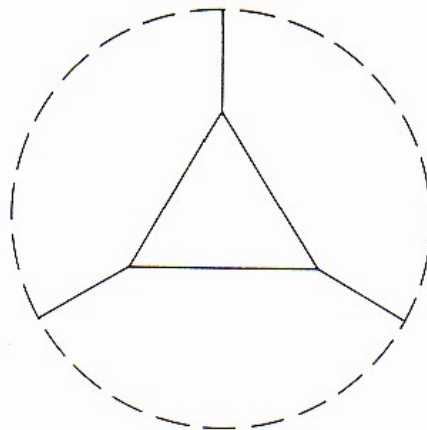
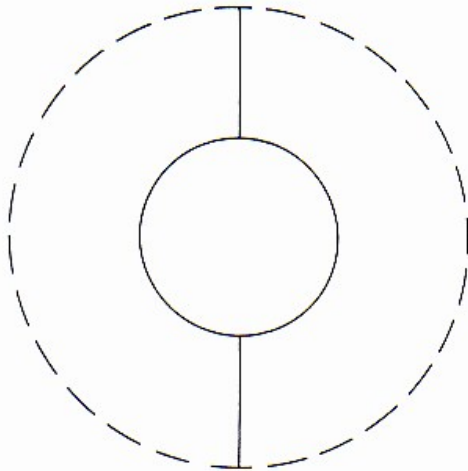
Kempe se interesa por el problema de los 4 colores tras la pregunta de Cayley en la London Mathematical Society.

En junio de 1879 obtiene su solución del teorema de los 4 colores y lo publica en el Amer. Journal of Maths.
En 1880, publica unas versiones simplificadas de su prueba, donde corrige algunas erratas de su prueba original, pero deja intacto el error fatal...



Kempe usa la fórmula de Euler para mapas cúbicos para obtener la llamada ***counting formula***, que permite probar:
Todo mapa tiene al menos una región con ≤ 5 regiones vecinas.

Es decir, cada mapa contiene al menos un digon, un triángulo, un cuadrado o un pentágono.



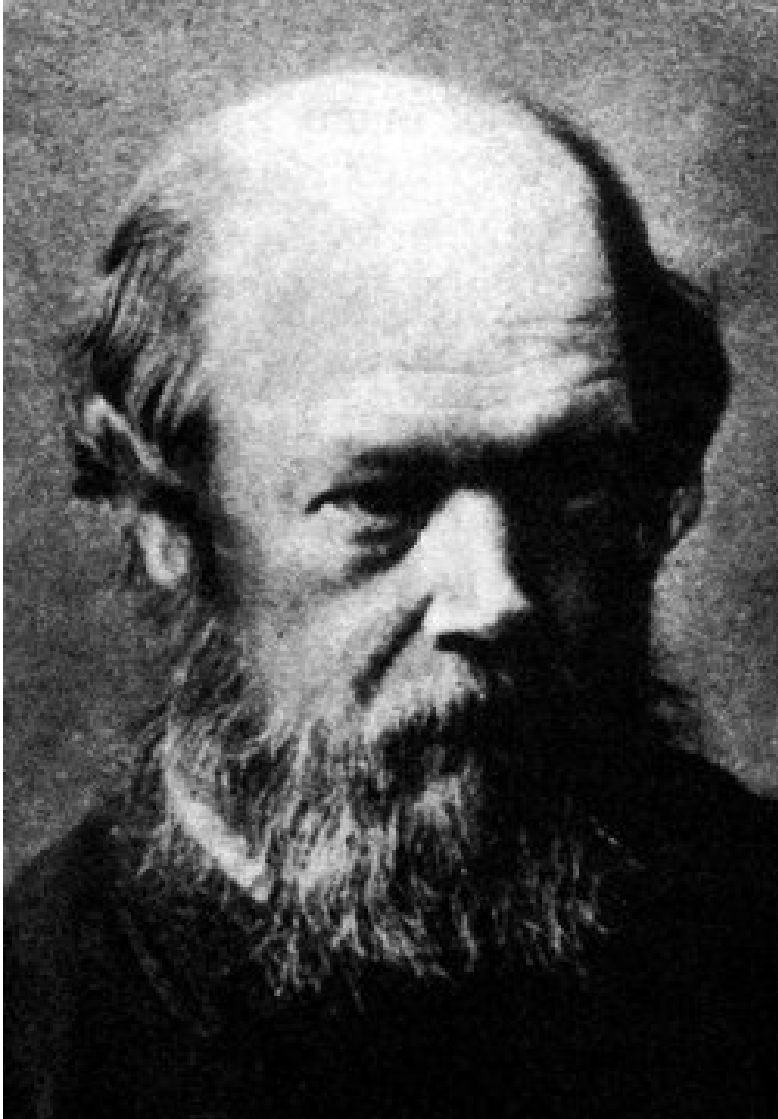
En efecto, si C_i representa la cantidad de regiones que tienen i regiones vecinas en el mapa, demuestra que:

$$4C_2 + 3C_3 + 2C_4 + C_5 - C_7 - 2C_8 - 3C_9 - \dots = 12,$$

por lo que existe C_i ($i = 2, 3, 4, 5$) no nulo.

Además, si $C_i = 0$ para $i = 2, 3$ y 4 , debe ser $C_5 \geq 12$, es decir:

Un mapa cúbico que no contiene digones, triángulos o cuadrados debe contener al menos 12 pentágonos.

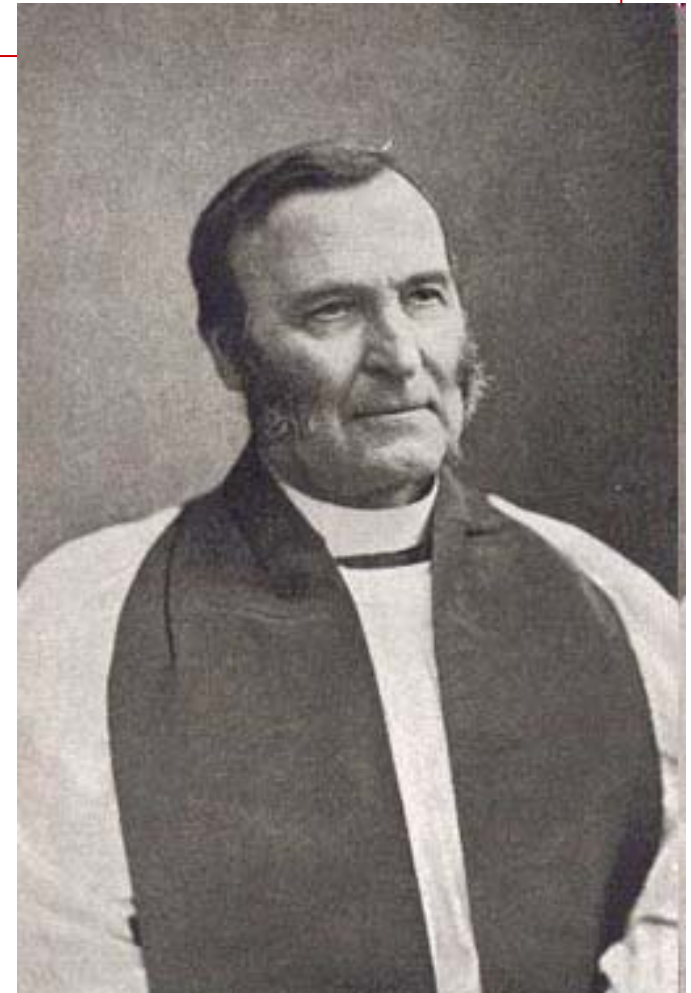


Peter Guthrie Tait (1831-1901), profesor de Filosofía Natural, físico-matemático de la Universidad de Edimburgo, da una prueba alternativa en 1880, también con un error.

Tait era gran aficionado al golf y estudiaba los modelos de trayectorias y el comportamiento de materiales por impacto.

Todos pensaban que la prueba tenía que ser más corta...
En 1887, el director del Clifton College organiza un concurso para encontrar una demostración del teorema de los 4 colores que ocupase “**menos de 30 líneas y una página de diagramas**”.

Entre otros, presenta una prueba el obispo de Londres, que más tarde sería el arzobispo de Canterbury (**Frederick Temple**, 1891-1902) en el *Journal of Education* en 1889...



Uno de los ingleses victorianos que se divirtió con el teorema de los 4 colores fue Charles Lutwidge Dodgson “Lewis Carroll” (1832-1898). A Carroll le encantaba inventar puzzles y juegos. Uno de ellos es:

- *A is to draw a fictitious map divided into counties.*
- *B is to colour it (or rather mark the counties with names of colours) using as few colours as possible.*
- *Two adjacent counties must have different colours.*
- *A's object is to force B to use as many colours as possible.*

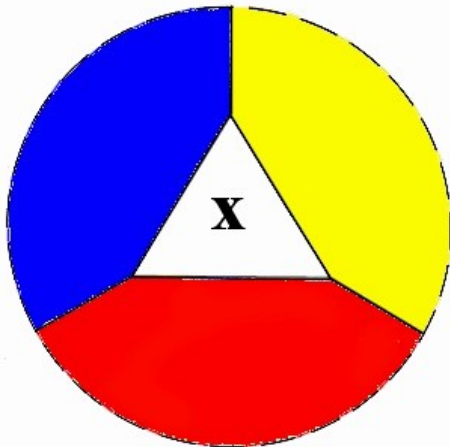
How many can he force B to use?



La “demostración” de Kempe

Si X es una región del mapa cúbico M , denotamos por $v(X)$ el número de sus regiones vecinas. La prueba se hace por inducción sobre el número de regiones. Como M es un mapa cúbico, existe una región X con $v(X) \leq 5$.

Hipótesis de inducción: $M - \{X\}$ es 4-coloreable.
Veamos que M también lo es. Hay tres casos.

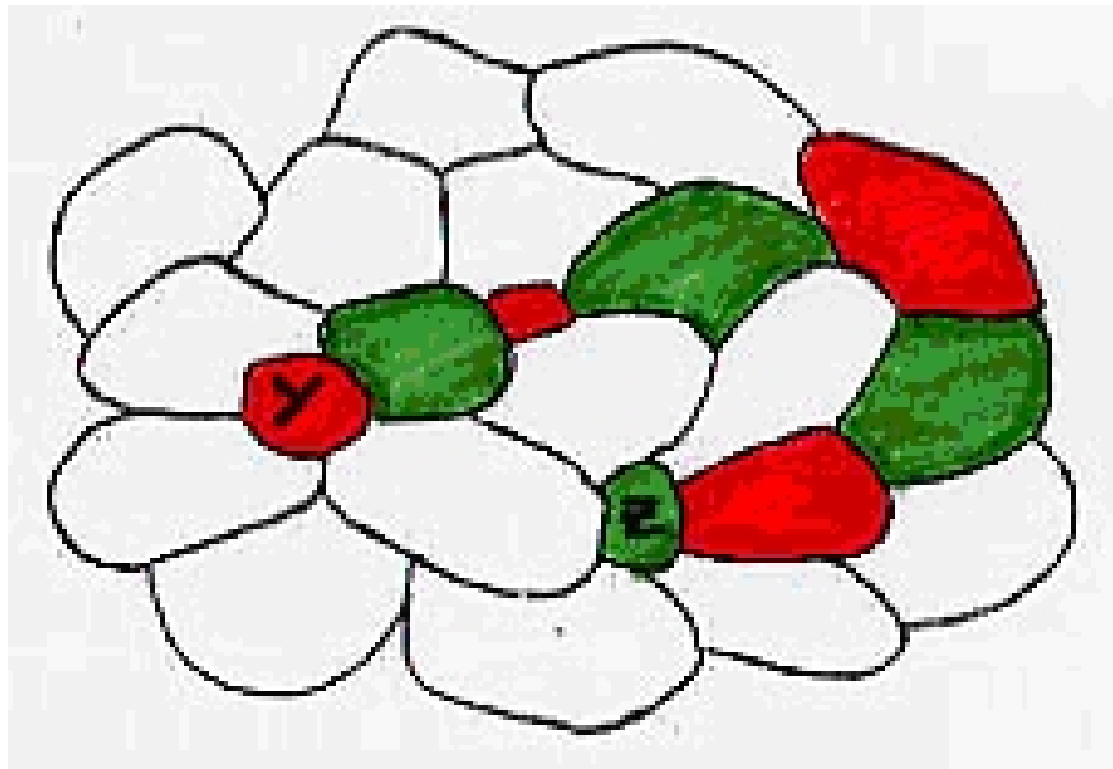


CASO 1: $v(X) = 3$

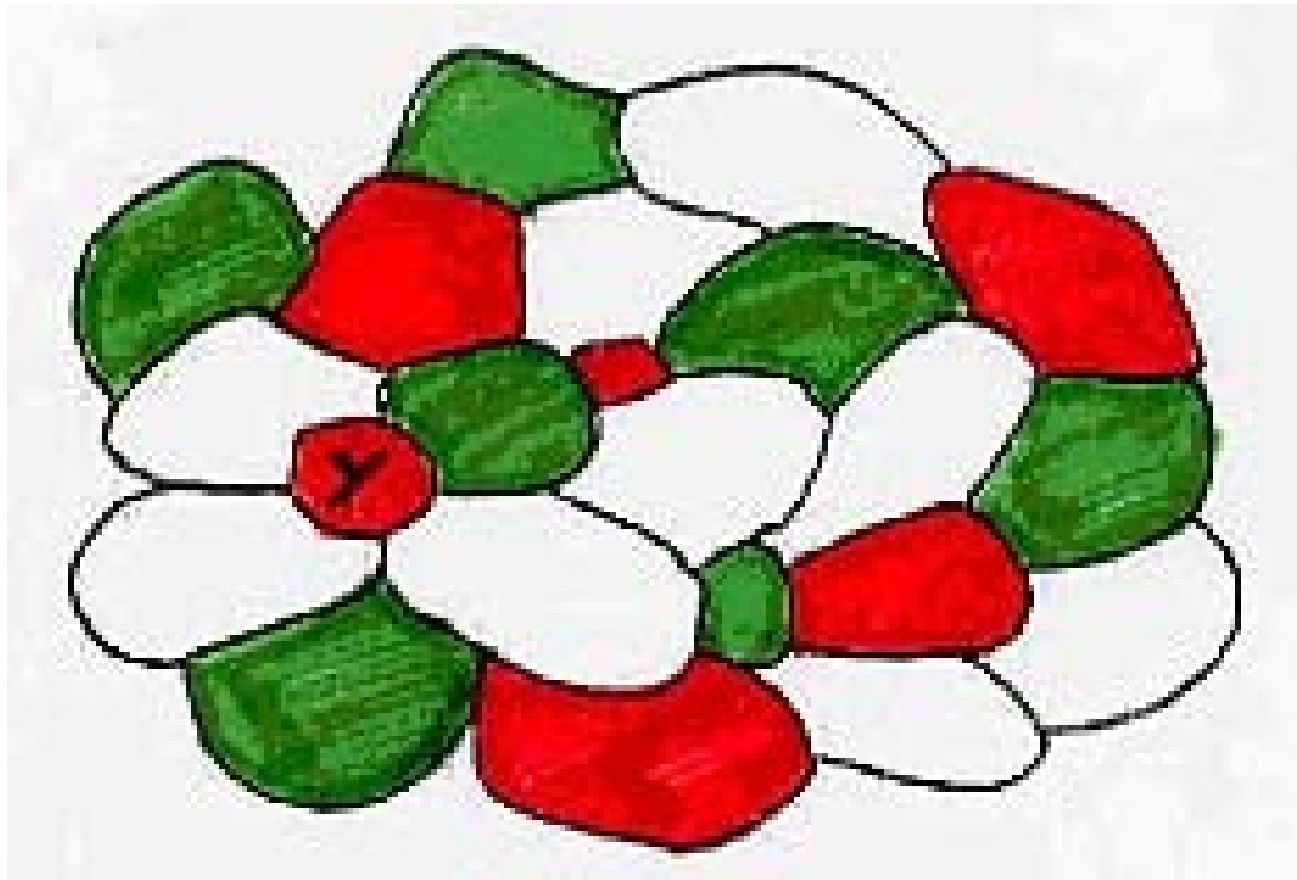
Basta con colorear X con el cuarto color

CASO 2: $v(X) = 4$

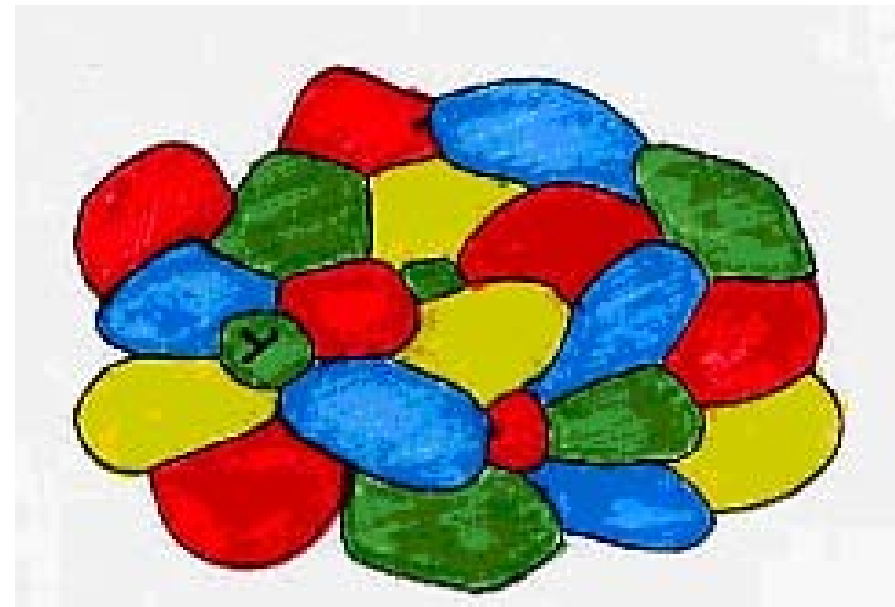
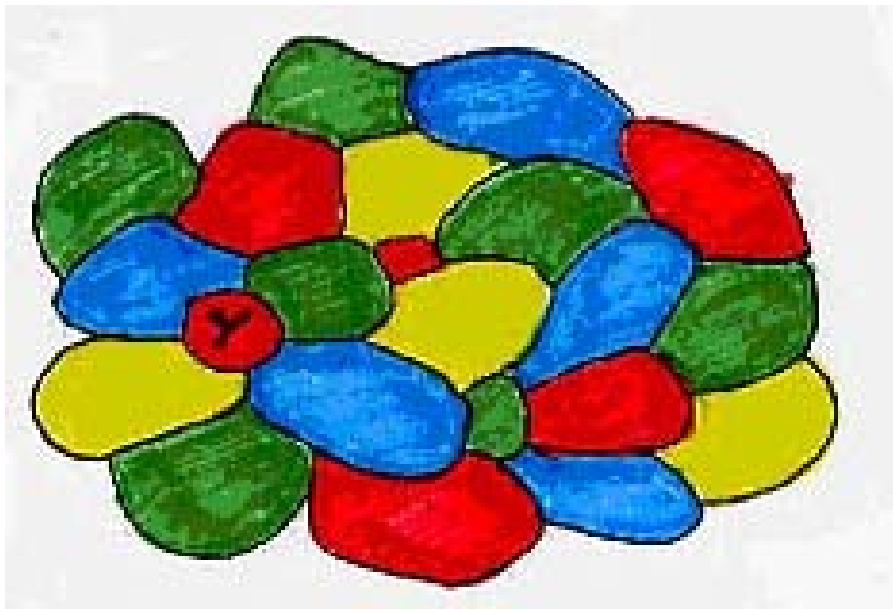
Si Z e Y son dos regiones, Y de color **rojo** y Z de color **verde** en un mapa 4-coloreado, se llama **cadena de Kempe rojo-verde** de Y a Z un camino que va de Y a Z, alternando los colores **rojo** y **verde**.



Una componente **rojo-verde** de Y es el conjunto de todas las regiones Z del mapa, tales que existe una cadena de Kempe **rojo-verde** de Y a Z .

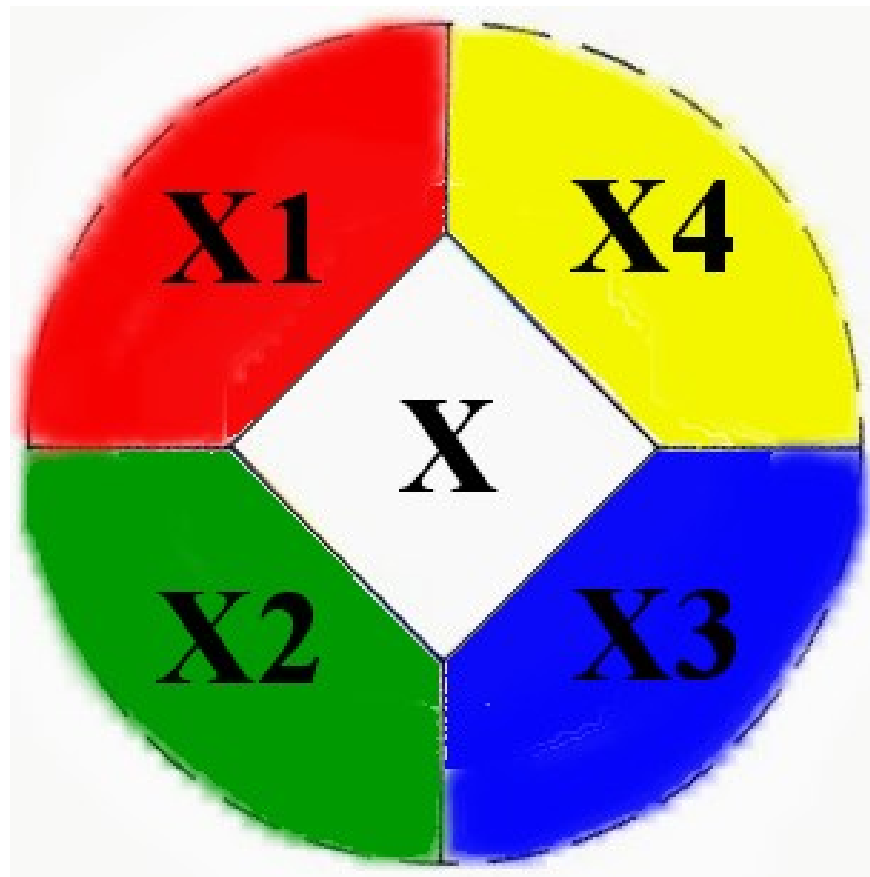


El interés de estas dos definiciones es que se pueden invertir los colores **rojo** y **verde** en una componente **rojo-verde** cualquiera de un mapa 4-coloreado para obtener un nuevo 4-coloreado respetando la regla de los 4 colores.



Carta original y carta obtenida por inversión de la componente **rojo-verde**.

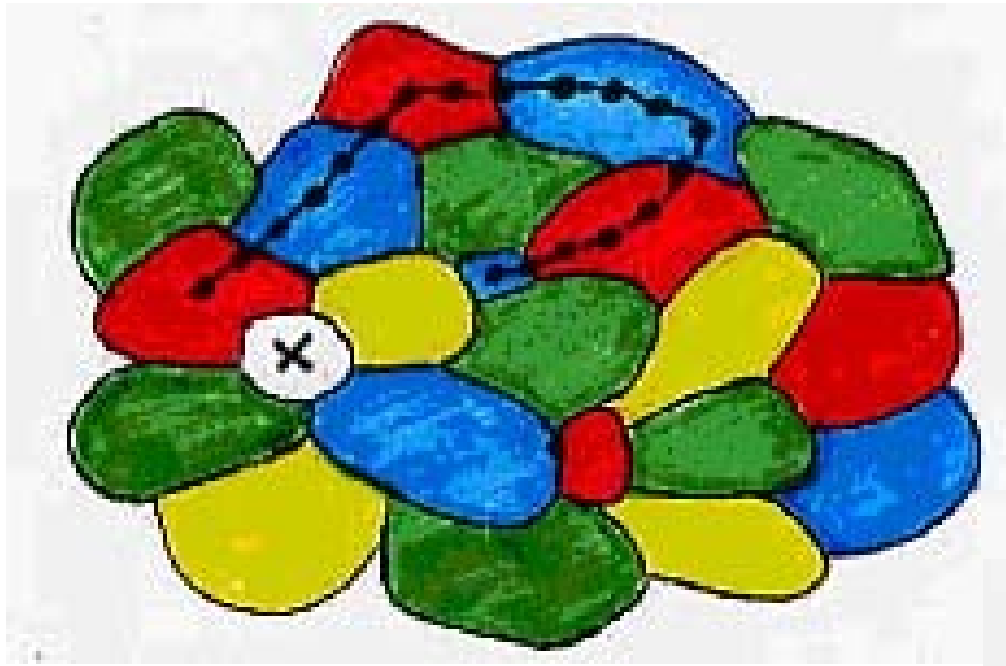
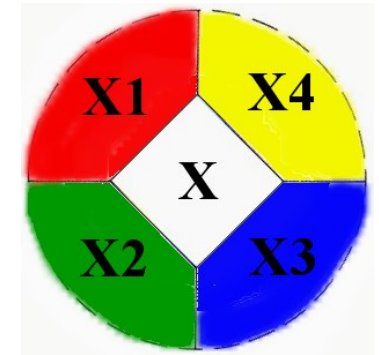
En este caso en que $v(X) = 4$, un entorno de X es de la forma:



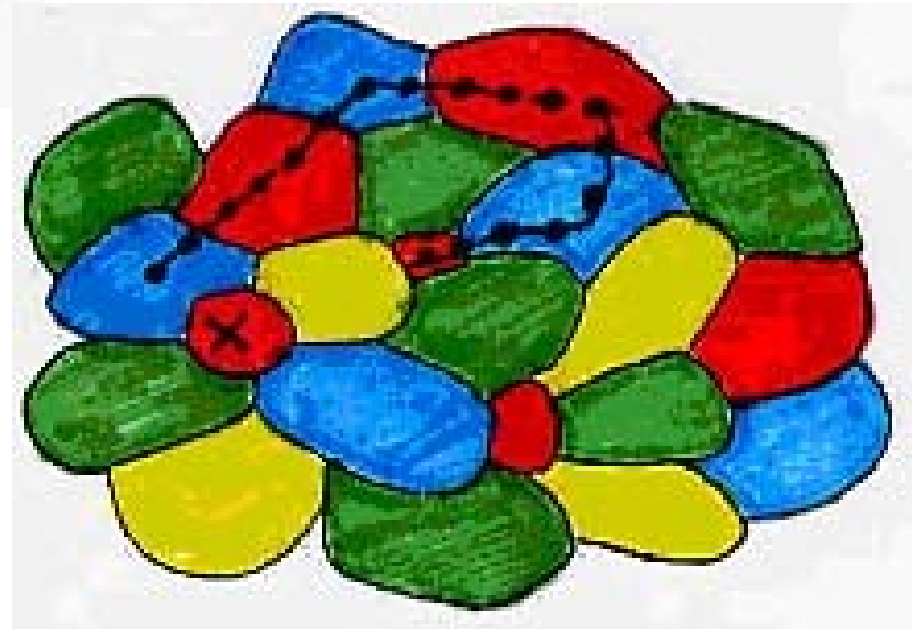
Y se distinguen dos posibilidades:

- a) X_3 no está en la componente **rojo-azul** de X_1
- b) X_3 está en la componente **rojo-azul** de X_1

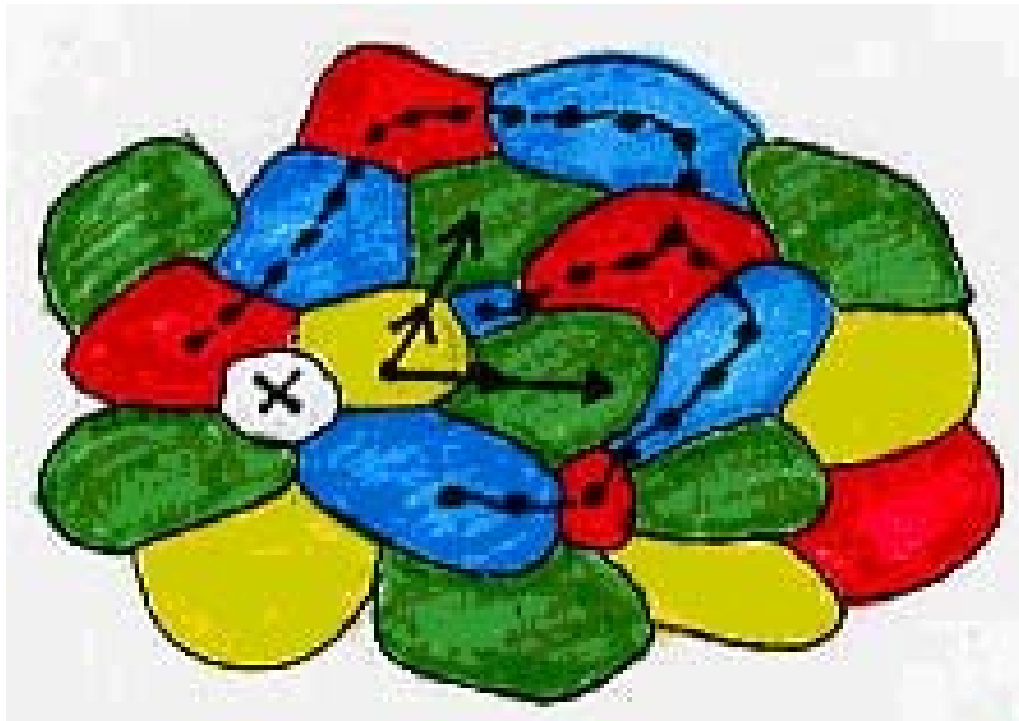
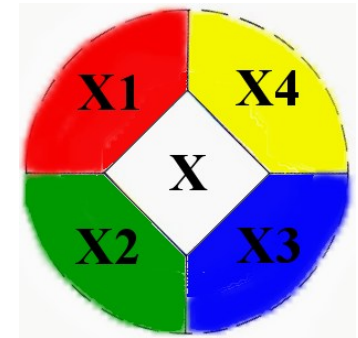
a) Si X_3 no está en la componente **rojo-azul** de X_1 ...



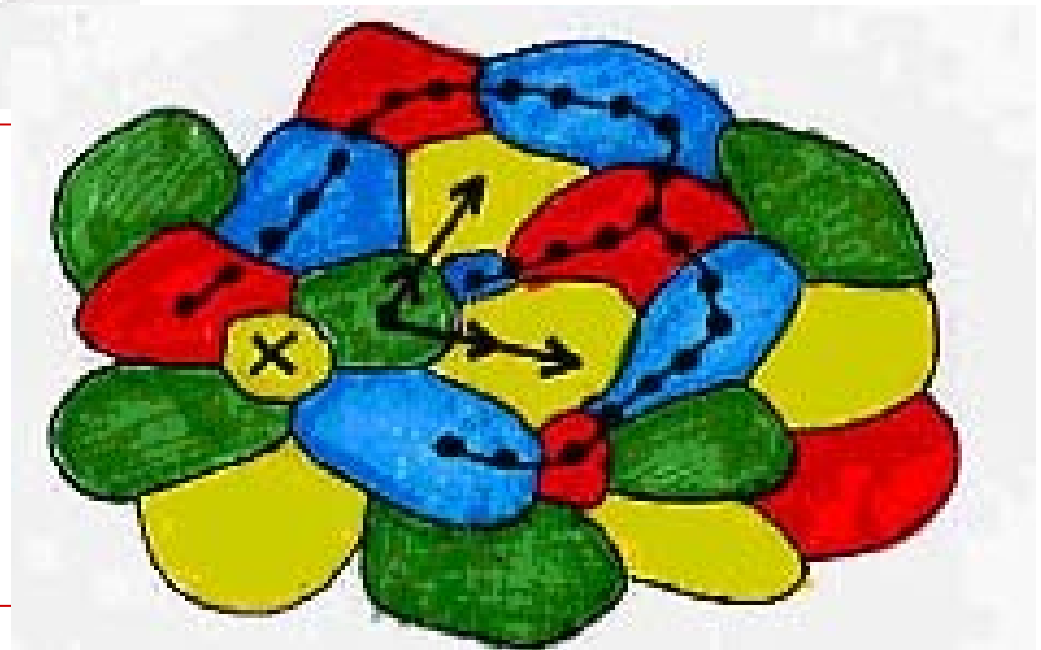
... se invierten el **rojo** y el **azul** en esta componente y se libera un color (**rojo**) para X.



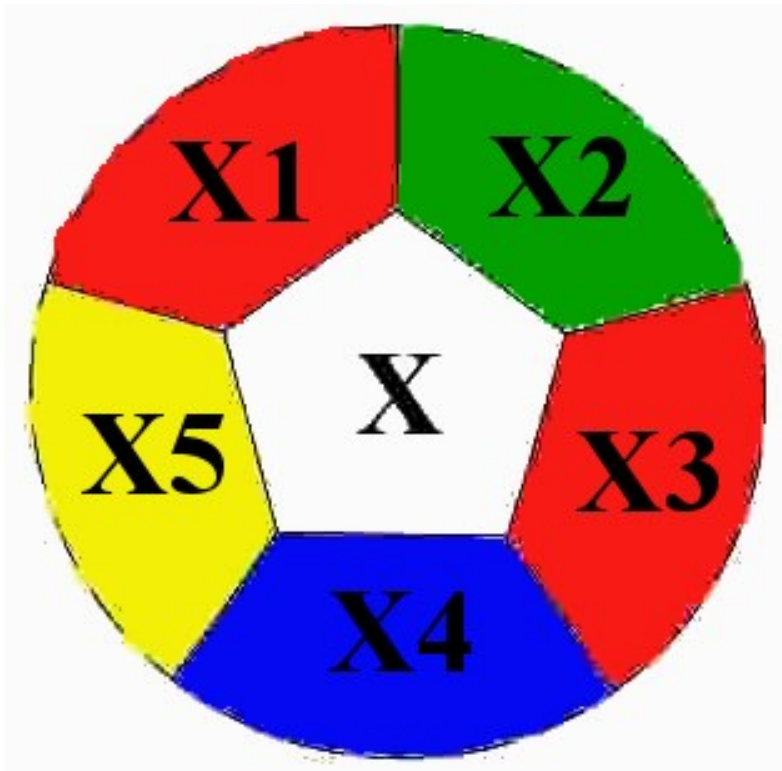
b) Si X_3 está en la componente **rojo-azul** de $X_1...$



... X_2 no está en la componente **amarillo-verde** de X_4 , y se invierten los colores en esta componente, liberando un color (**amarillo**) para X .



CASO 3: $v(X) = 5$, un entorno de X es de la forma:

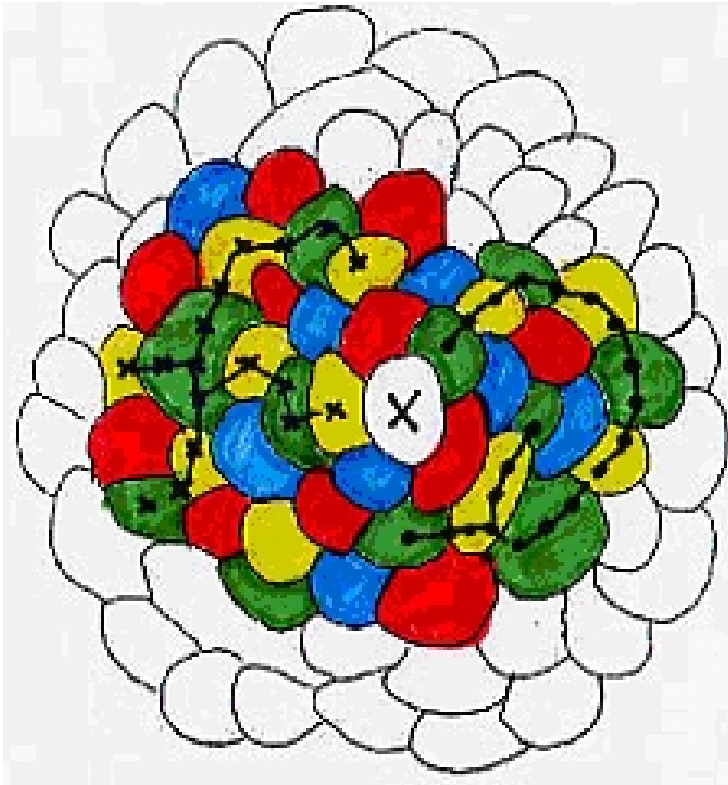
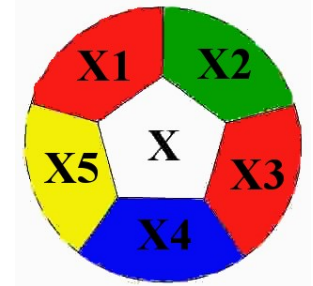


Se distinguen dos posibilidades:

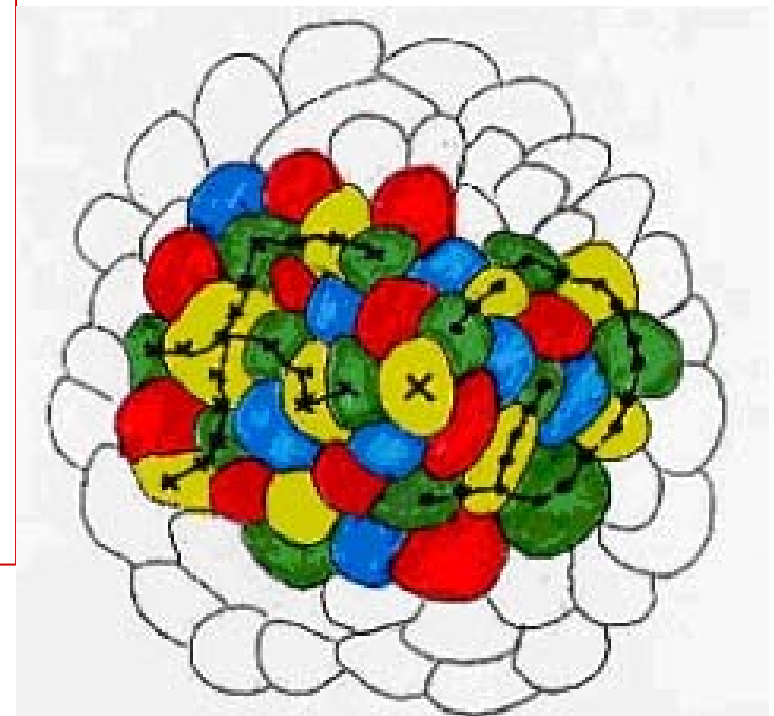
a) X_2 no pertenece a la componente **amarilla-verde** de X_5 o X_2 no pertenece a la componente **azul-verde** de X_4 ,

b) X_2 pertenece a la componente **amarilla-verde** de X_5 y X_2 pertenece a la componente **azul-verde** de X_4

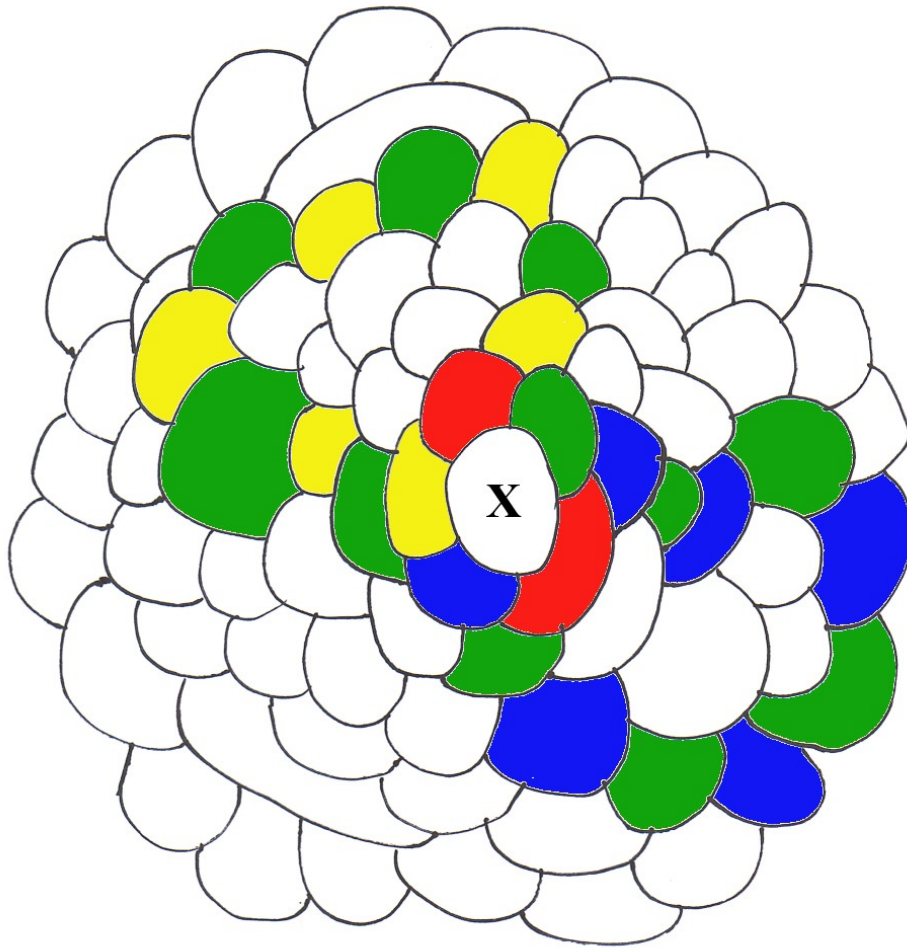
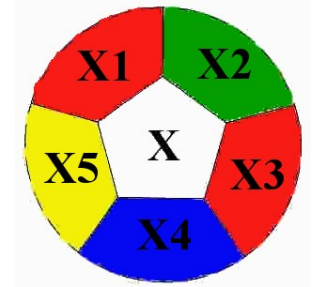
a) Supongamos que X_2 no pertenece a la componente **amarilla-verde** de X_5 (el otro caso se hace análogamente)...



... se invierten el **amarillo** y el **verde** en esta componente y se libera un color (**amarillo**) para X.



b) X_2 pertenece a la componente **amarilla-verde** de X_5 y X_2 pertenece a la componente **azul-verde** de X_4 ...

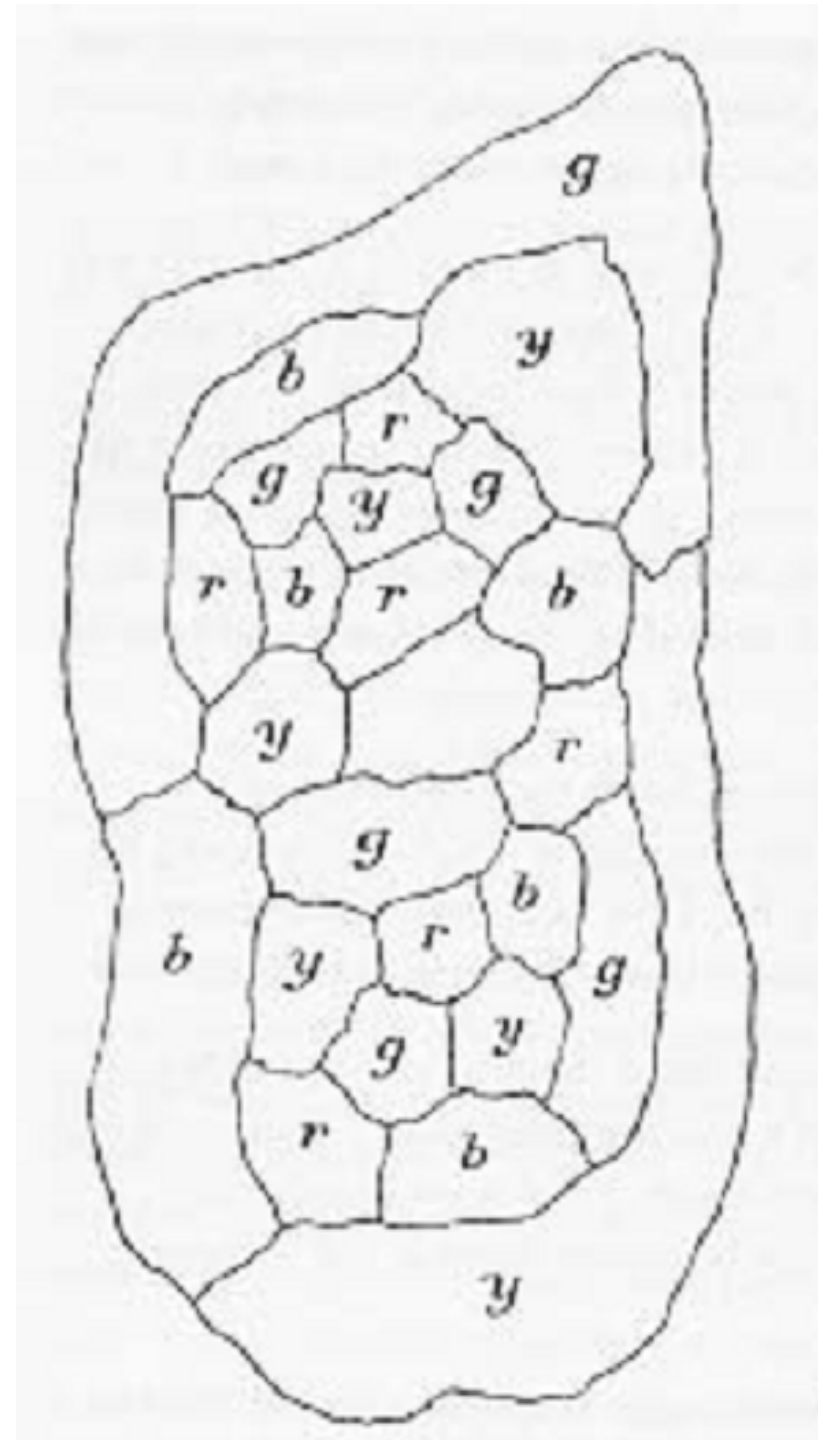


...se invierten las componentes **roja-azul** de X_1 y **roja-amarilla** de X_3 , para liberar un color (**rojo**) para X.

El error fatal....

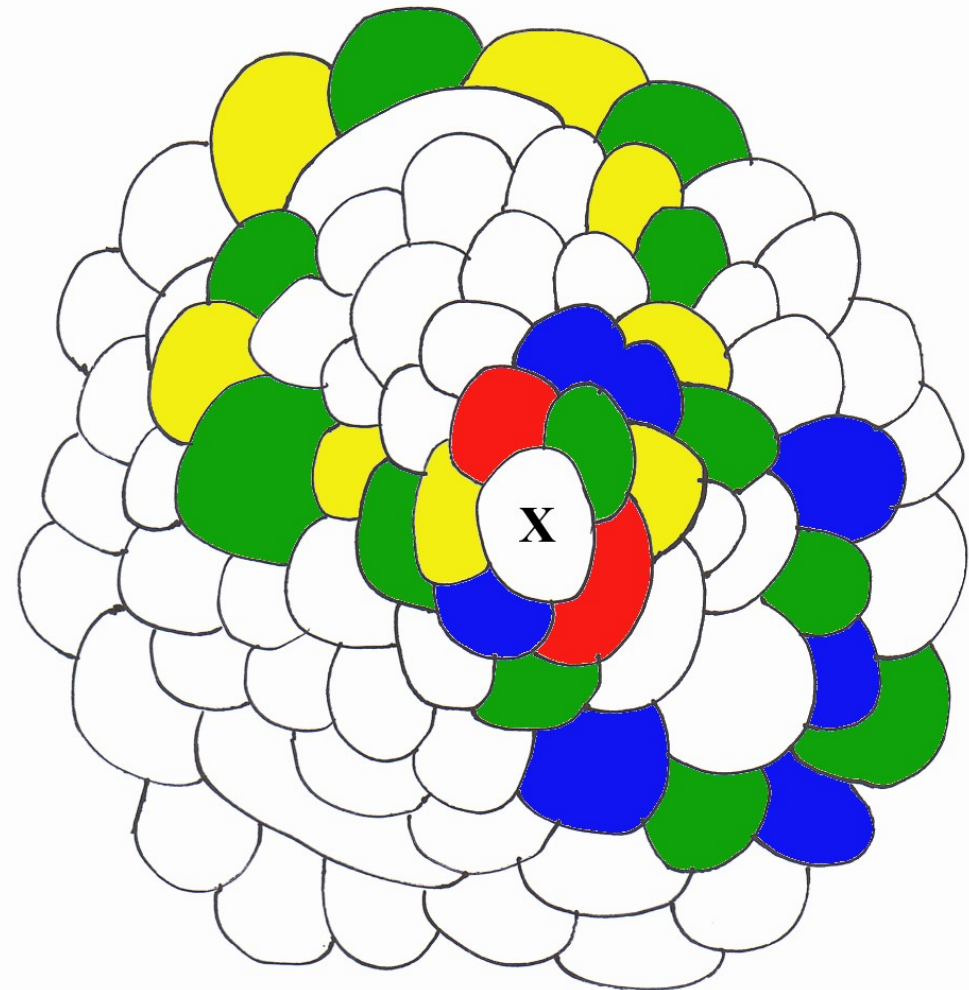
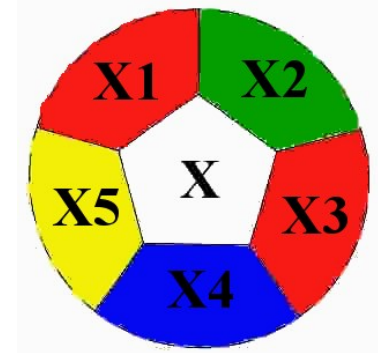
Percy John Heawood
(1861-1955) publica
“*Map Colour Theorem*”
en el J. Pure Appl.
Maths en 1890.

Encuentra, ***muy a su
pesar***, un caso para el
que la prueba de Kempe
no funciona...



Aquí se encuentra el error: en efecto, las Componentes **amarilla-verde** de X_5 y **azul-verde** de X_4 pueden cruzarse...

... y entonces, las componentes **rojo-azul** de X_1 y **rojo-amarillo** de X_3 no se pueden invertir simultáneamente...



Kempe admite su error en las páginas de los Proceedings of the London Math. Soc. y el 9 de abril de 1891 dice lo siguiente en un encuentro de la London Mathematical Society:

“My proof consisted of a method by which any map can be coloured with four colours. Mr. Heawood gives a case in which the method fails, and thus shows the proof to be erroneous. I have not succeeded in remedying the defect, though it can be shown that the map which Mr. Heawood gives can be coloured with four colours, and thus his criticism applied to my proof only and not to the theorem itself”.



Heawood (1861-1955) era conocido por su excentricidad. En su obituario en la London Math. Soc. se destacaba:

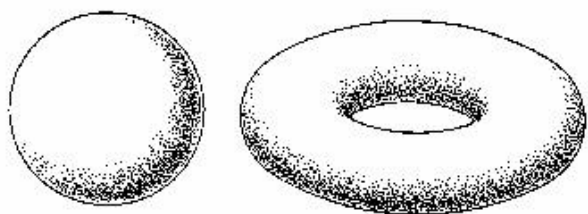
“In his appearance, manners and habits of thought, Heawood was a extravagantly unusual man. He had an immense moustache and a meagre, slightly stooping figure. He usual wore an inverness cape of strange pattern and manifest antiquity, and carried an ancient handbag. His walk was delicate and hasty, and he was often accompanied by a dog, which was admitted to his lectures”.

Heawood prueba el teorema de los 5 colores usando el argumento de las cadenas de Kempe.

Heawood prueba también que el número máximo ***N*** de colores necesarios para colorear un mapa (su ***número cromático***) sobre una superficie de género ***g > 0*** (todas menos la esfera...) sin borde es la parte entera de:

$$\frac{1}{2} (7 + (48g+1)^{\frac{1}{2}})$$

Este es el llamado ***problema de coloreado de mapas de Heawood***.



El género



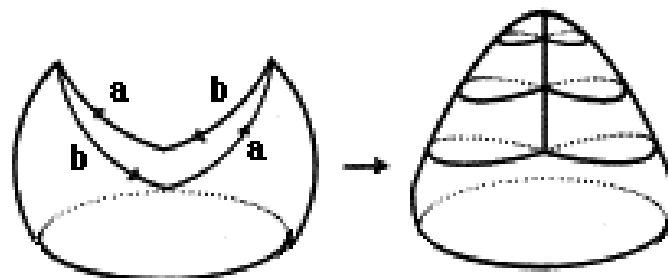
La fórmula de Euler para poliedros de género $g > 0$ se debe a Simon Antoine Jean Lhuillier (1750-1840) y dice que:

- **Caso orientable**

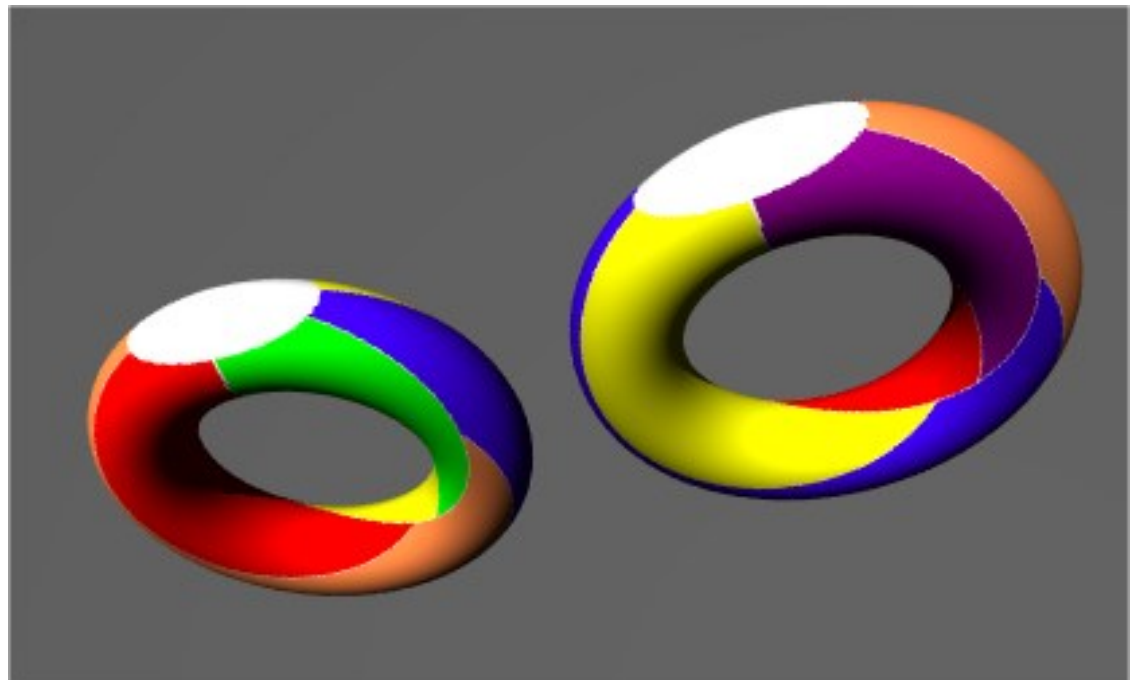
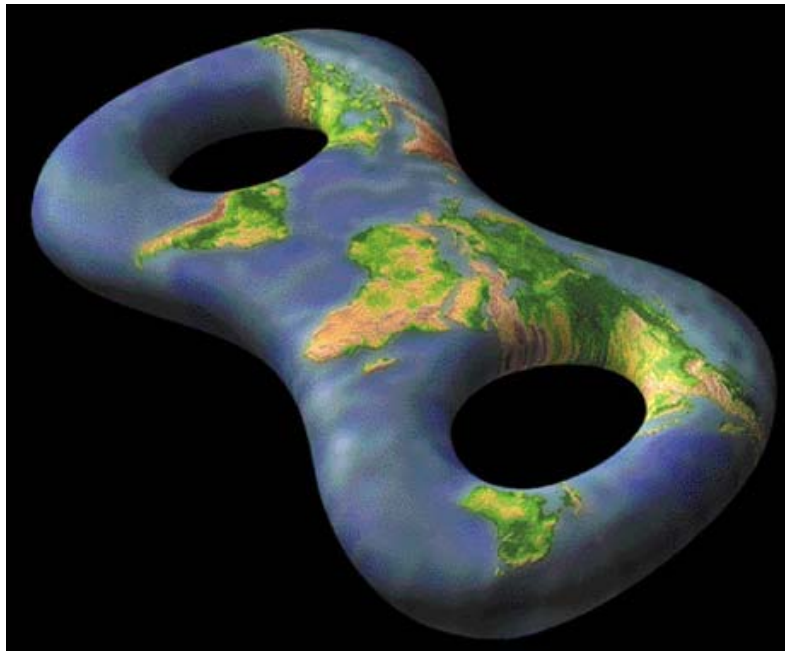
$$\text{Núm(caras)} - \text{Núm(aristas)} + \text{Núm(vértices)} = 2-2g$$

- **Caso no orientable**

$$\text{Núm(caras)} - \text{Núm(aristas)} + \text{Núm(vértices)} = 2-g$$



En 1968, **Gerhard Ringel y Ted Youngs** prueban que para toda superficie sin borde orientable de género $g > 0$ o toda superficie sin borde no orientable distinta de la botella de Klein, N no es el máximo sino el número exacto.



Coloreado de mapas tóricos

Para colorear mapas
sobre el toro son
necesarios... ¡7 colores!

$$\lceil \frac{1}{2}(7+(48g+1)^{\frac{1}{2}}) \rceil = 7$$



<http://www.johnstonsarchive.net>

Coloreado sobre el doble toro

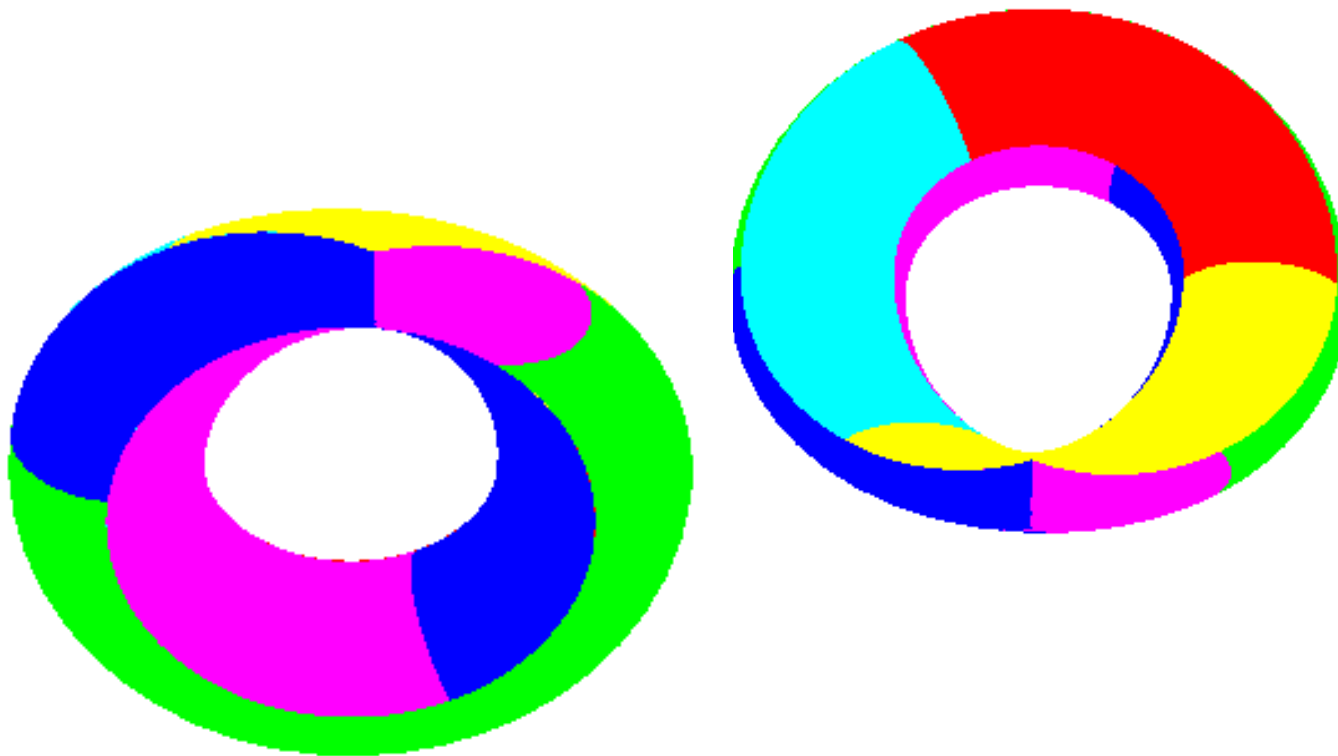


Bernard Frize: *Percy John Heawood Conjecture (Edition for Parkett 74)*, 2005.

$$\lfloor \frac{1}{2}(7+(48g+1)^{\frac{1}{2}}) \rfloor = 8$$

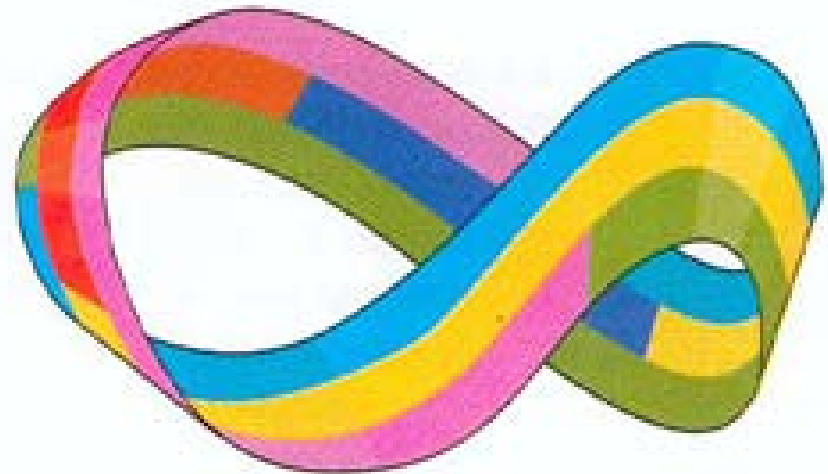
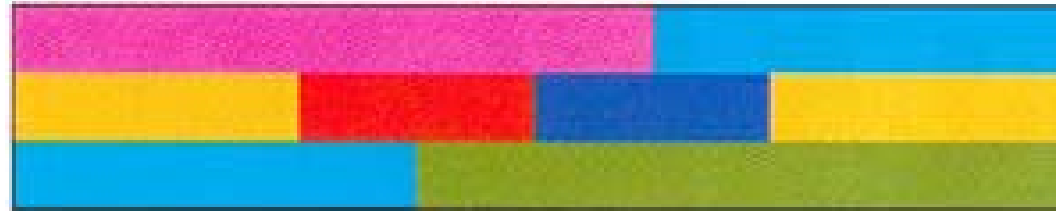
La botella de Klein

Para la botella de Klein se necesitan **6 colores** (uno menos que su número **$N=7$**), J.L. Saaty, 1986.



La banda de Möbius

Para la banda de Möbius, que es una superficie con borde, se necesitan también **6 colores** (aquí la fórmula de Heawood no se puede aplicar).



¡El único caso no resuelto es el caso de la esfera (el plano)!

Hermann Minkovski

Se comenta que **Hermann Minkovski** (1864-1909) dijo en cierta ocasión a sus alumnos que él no había resuelto el problema de los 4 colores, porque se trataba de un problema que sólo habían atacado matemáticos de tercera fila...

“Si quiero, puedo probarlo” ...
algún tiempo más tarde reconoció de manera sumisa: ***“El cielo se ha enfadado por mi arrogancia: mi prueba es también errónea”***.



Guión de la charla

Historia de la conjetura de los cuatro colores:
de 1852-1996

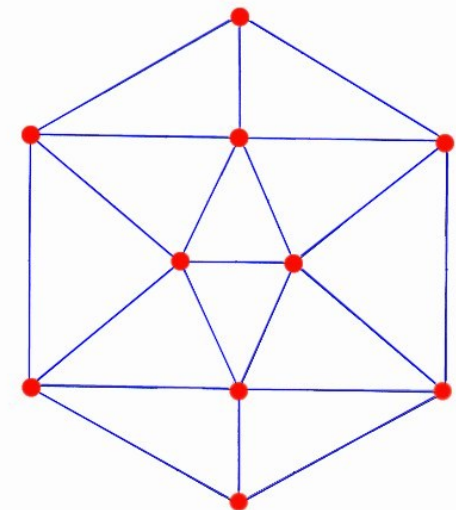
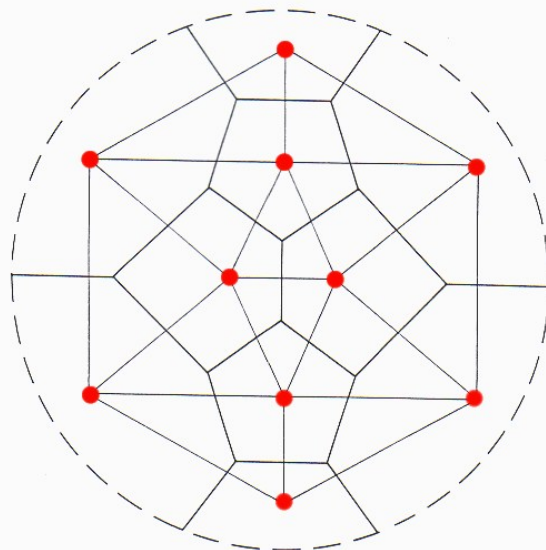
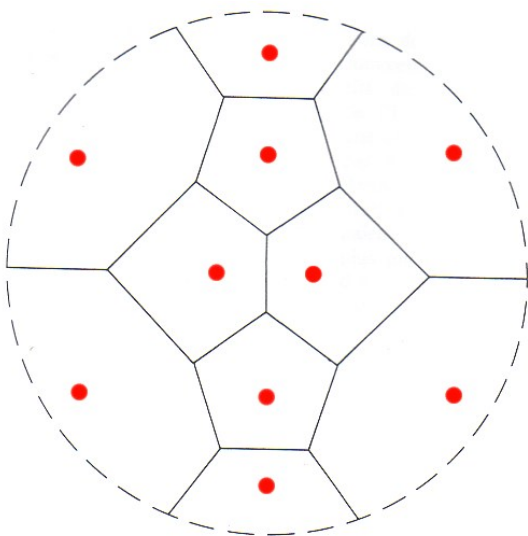
La “prueba” errónea de Kempe... y sus buenas ideas

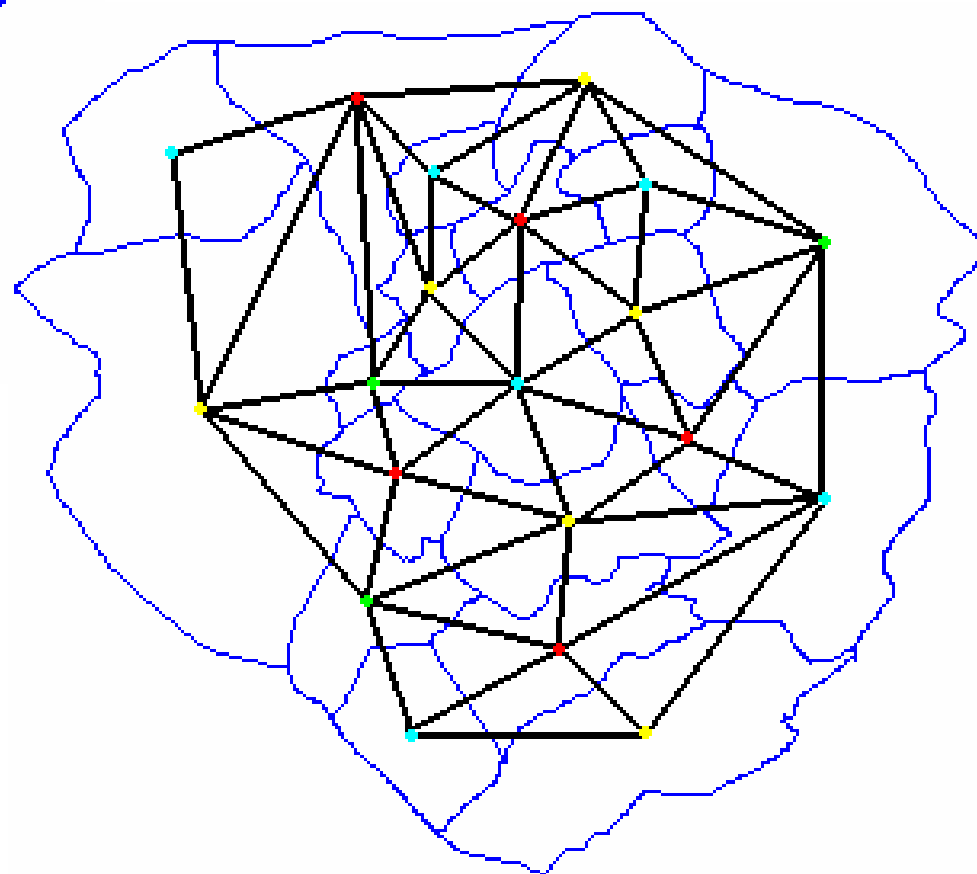
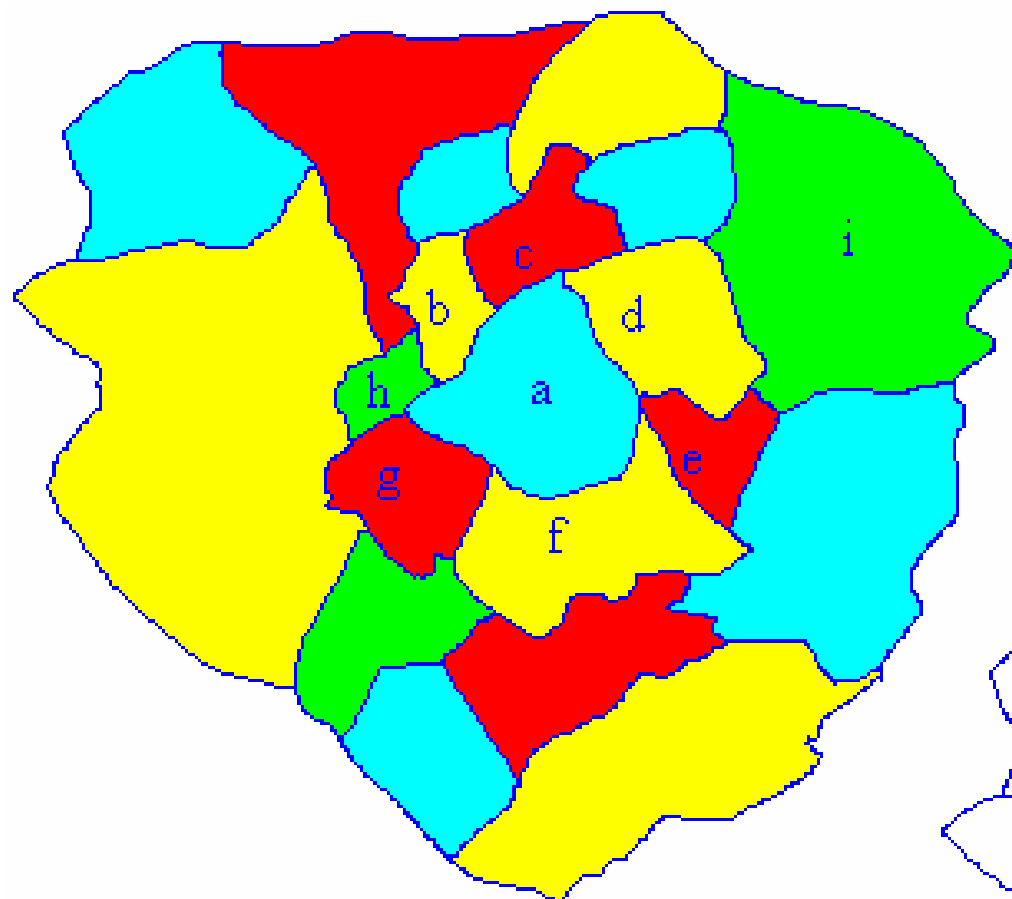
😊 Un siglo más tarde: llega la “demostración” con ayuda de ordenador

¿Está realmente resuelta la conjetura?

¿Qué hacer ahora?

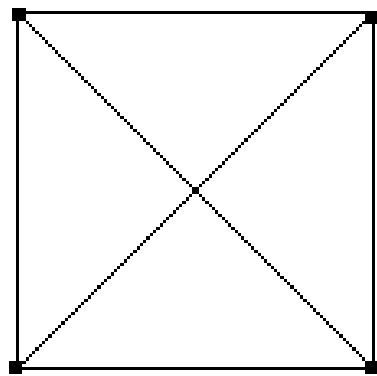
Por comodidad, se trabaja con grafos en vez de con mapas: se marca la capital de cada país, se unen las capitales de países contiguos, y se obtiene el **grafo de incidencia (o dual)** del mapa. Colorear el mapa equivale a colorear las capitales (vértices), asignando distintos colores a dos capitales unidas por una ruta (arista).



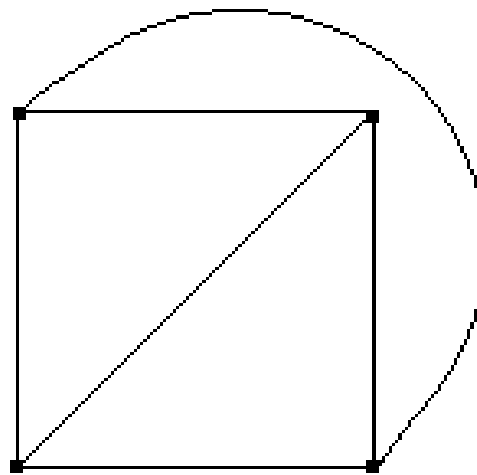


Grafos de incidencia

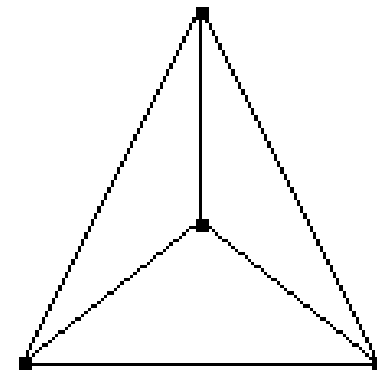
Estos grafos son siempre ***planares***, i.e. se puede dibujar en el plano una representación concreta del grafo, en la cual las aristas no se corten excepto en un eventual vértice común.



K_4 (a)



K_4 (b)



K_4 (c)

Grafos de incidencia

- Un mapa es **cúbico** si y sólo si su grafo de incidencia es **triangulado** (grafo planar en el que cada cara tiene exactamente tres aristas).
- El número de **regiones vecinas** se corresponde ahora con el **grado** de cada vértice (número de aristas incidentes).

La **fórmula de Euler** se hereda para grafos de incidencia
 $\text{Núm}(\text{vértices}) - \text{Núm}(\text{aristas}) + \text{Núm}(\text{caras}) = 2$

Minimales *criminales*

Un acercamiento alternativo para resolver la conjetura de los 4 colores es: imaginar que es falsa, ie, existen algunos mapas (grafos) que no pueden 4-colorearse. Entre estos mapas (grafos) que necesitan 5 colores o más, debe de haber alguno con el **menor número posible de regiones**. Estos ejemplos se llaman **minimales criminales**... así un minimal criminal no puede 4-colorearse, pero un mapa (grafo) con **menos** regiones (vértices) **sí**.

Para probar el teorema de los 4 colores hay que demostrar que ***no existen minimales criminales***... y eso se consigue encontrando condiciones restrictivas sobre este tipo de mapas (grafos).

Lo que Kempe demuestra con su argumentación (en este nuevo lenguaje), es que un *minimal criminal* no puede contener digones, triángulos o cuadrados (aquí es donde usa su método de cadenas),... y falla al intentar probar que tampoco puede contener pentágonos...

Si hubiese conseguido esto último, habría quedado establecida la conjetura, al no existir minimales criminales (pues cualquiera de ellos debe contener obligatoriamente una de las anteriores cuatro configuraciones).

Los dos conceptos clave

La demostración (correcta) del teorema de los 4 colores toma la de Kempe, pero para la inducción, en vez de eliminar un único vértice, se elimina un determinado trozo del grafo (una **configuración**).

- **Un conjunto inevitable K** es un conjunto finito de configuraciones (una configuración es un ciclo con vértices internos triangulados) tal que todo grafo contiene una copia de una k de K : por ejemplo, Kempe demuestra que para mapas cúbicos, el siguiente conjunto es inevitable
 $K = \{\text{digones, triángulos, cuadrados, pentágonos}\}$
- k es **una configuración reducible**, si se puede deducir el coloreado de cualquier grafo que contenga a k , a partir de un grafo menor.

Plan de la prueba: encontrar un conjunto inevitable K (todo grafo no 4-coloreable contiene una copia conforme de alguna k en K).

Si K estuviese formado sólo de configuraciones reducibles, la prueba del teorema de los 4 colores estaría terminada: en efecto, en tal caso, no podría existir un minimal criminal.

En 1913, **George David Birkhoff** (1884-1944) publica “***The reducibility of maps***”, y avanza en el estudio de sus “diamantes de Birkhoff”.



Heinrich Heesch



Mucha gente trabajaba en el tema... Uno de ellos es **Heinrich Heesch** (1906-1995), graduado en matemáticas y música.

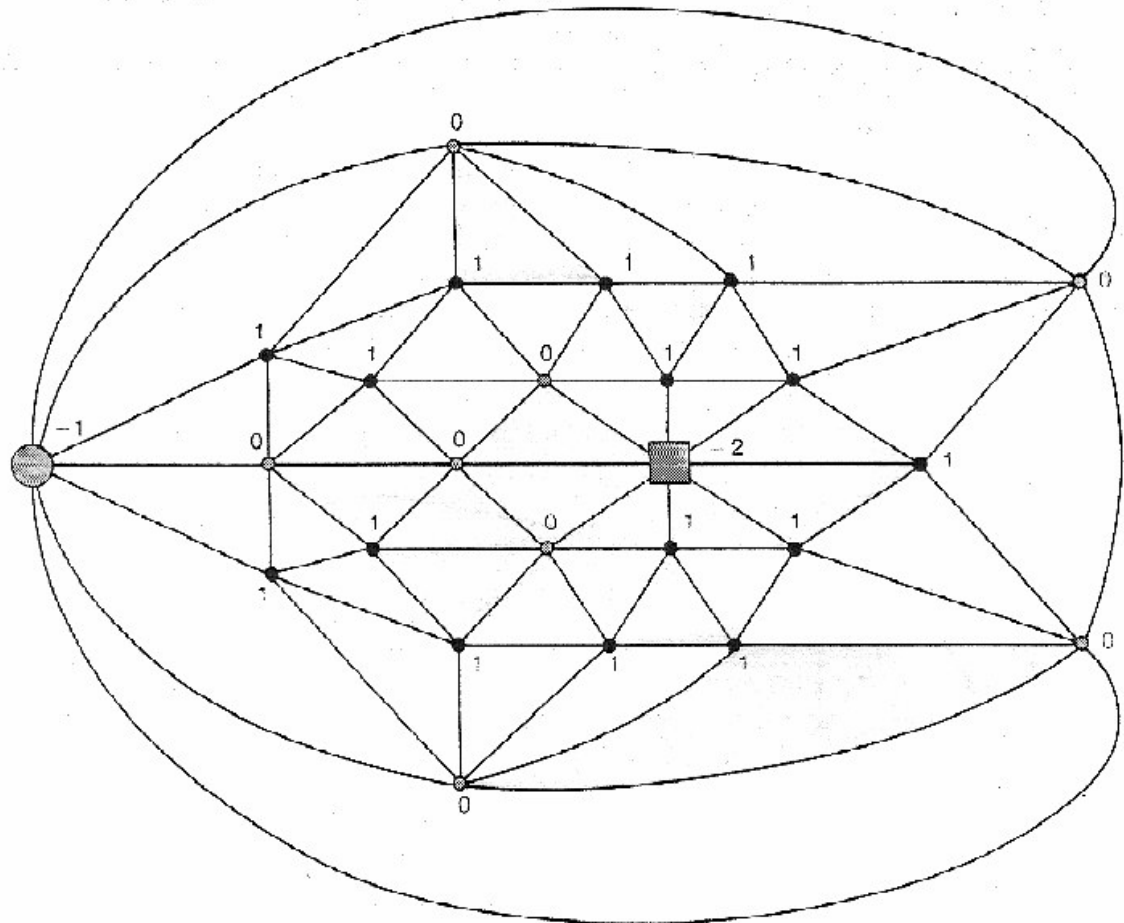
Heesch resolvió en 1932 uno de los 23 problemas de Hilbert de 1900, el “***regular parquet problem***” (construcción de un tipo particular de embaldosamiento del plano), que es parte del problema número 18 de Hilbert.

En 1969, Heinrich Heesch sistematiza la prueba de la reducibilidad, desarrollando un algoritmo que intenta implementar con ordenador:

- realiza diversos tests con el programa **Algol 60** en un **CDC1604A** (en contacto ya en América con su alumno Wolfgang Haken);
- afirma que la conjetura puede resolverse considerando ***tan sólo*** 8.900 configuraciones;
- da una manera de construir conjuntos inevitables (obstrucciones locales), a través de su ***algoritmo de descarga***.

Construcción de conjuntos inevitables

Para generar un conjunto inevitable de configuraciones, la idea de Heesch es considerar el grafo como una **red eléctrica**, asociando a cada vértice una “carga” inicial de **6- $d(v)$** , donde **$d(v)$** es el grado de **v** (número de aristas incidentes con este vértice).

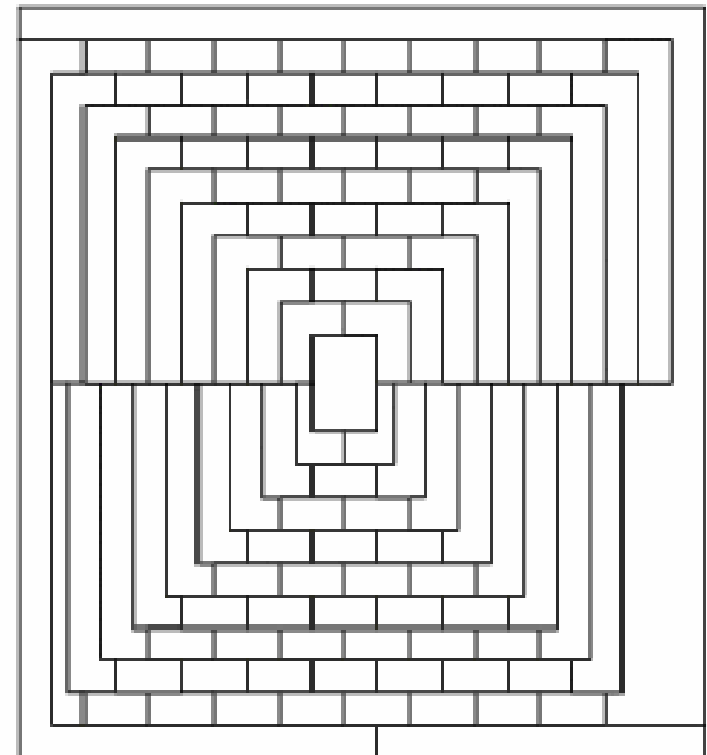
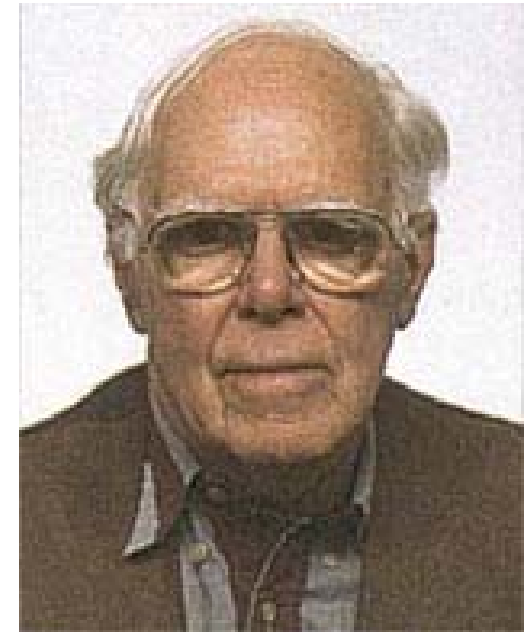


Usando la fórmula de Euler, se demuestra que la suma de las cargas en un grafo triangulado es **12**. Si ahora se desplazan las cargas eléctricas sobre la red (con su **algoritmo de descarga**), la suma total seguirá siendo **12**: los vértices cargados positivamente pueden ceder cargas, los cargados negativamente pueden recibir y los de carga nula no intercambian.

Al final del proceso, se eliminan los vértices de carga negativa y se obtiene un conjunto de configuraciones, de vértices de cargas nulas o positivas: como todo grafo triangulado es de carga total **12**, debe contener al menos una de las configuraciones (cuya geometría dependerá del proceso de descarga elegido) del conjunto anterior, que forma entonces un **conjunto inevitable**.

La broma de Gardner

El divulgador **Martín Gardner** (1914-2010), editor de los ***Math Games*** de Sci. American, publicó el 1 de abril de 1975 un artículo, pretendiendo que se había encontrado un mapa de **110 regiones** (el mapa de William McGregor, especialista en teoría de grafos según Gardner), que requería necesariamente **5 colores**, dando así un contraejemplo, que invalidaba la aún por entonces conjetura de los 4 colores.

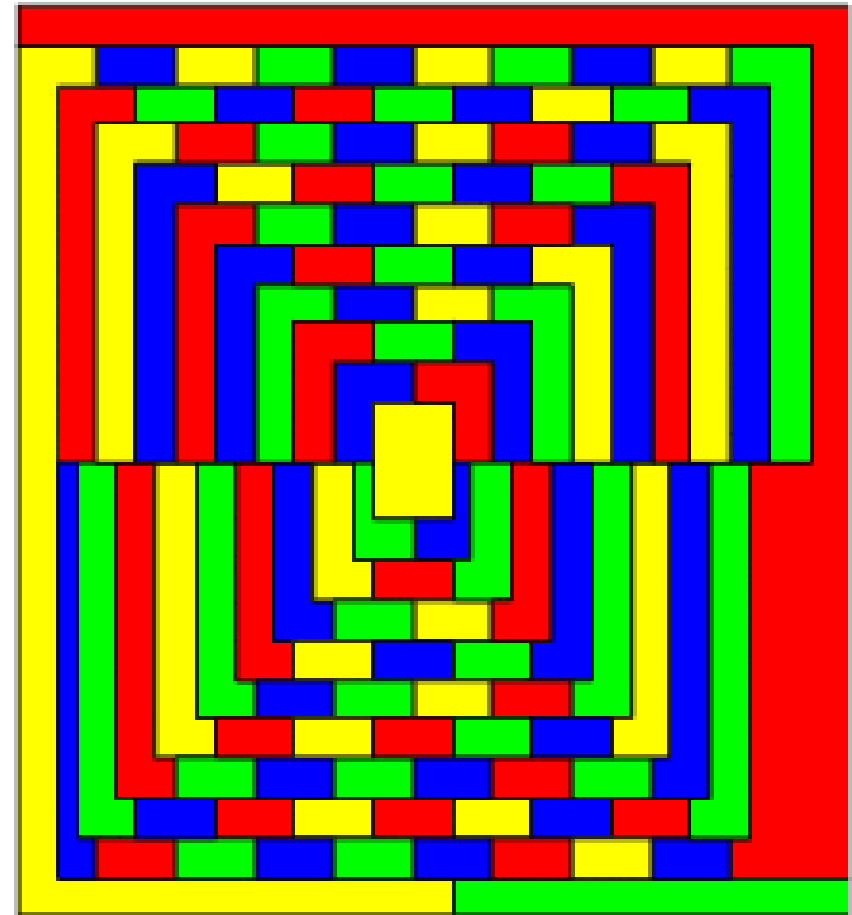
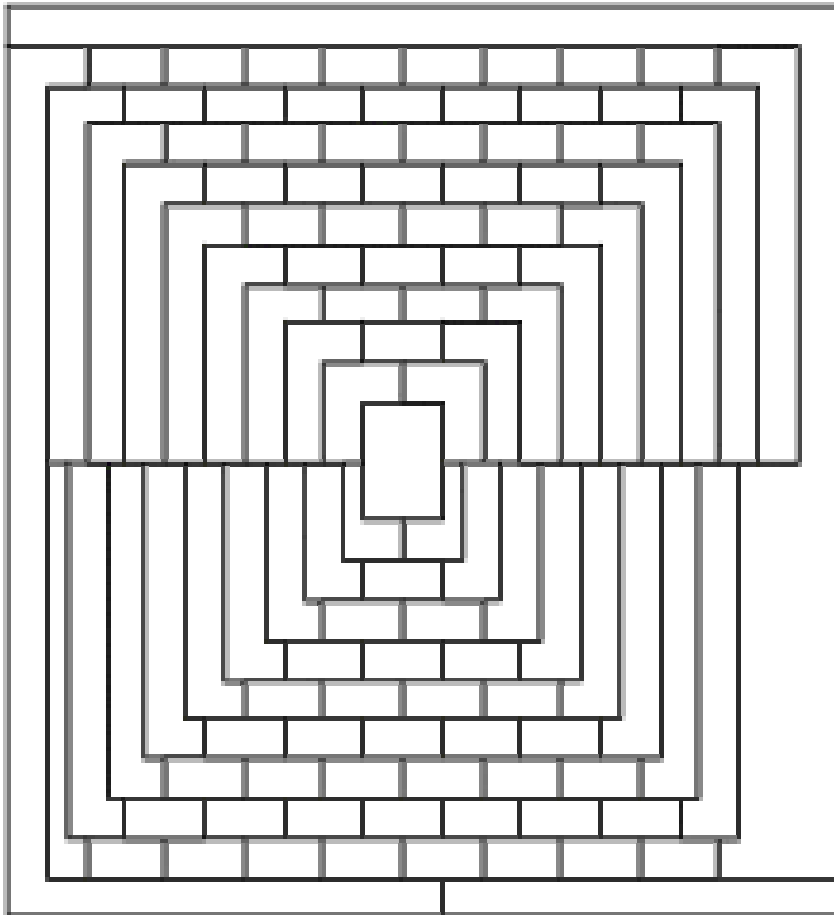


El 1 de abril es el ***Día de los inocentes***... en *Six sensational discoveries that somehow or another have escaped public attention* (Sci. Amer. **232**, 127-131, 1975), Gardner hacía tambalearse parte de la Ciencia, hablando de:

1. una refutación de la teoría de la relatividad de Einstein, a través de un experimento del físico ***Humbert Pringle***;
2. el descubrimiento en el *Codex Madrid I*, de que Leonardo había inventado el retrete que se limpia con el agua de su cisterna, debido a ***Augusto Macaroni*** de la Universidad Católica de Milán;
3. la demostración de ***Richard Pinkleaf***, con ayuda del ordenador MacHic, de que el movimiento de apertura de peón a cuatro torre de rey en ajedrez gana siempre la partida;
4. el sorprendente resultado de que el número e elevado a $\pi(163)^{1/2}$ es el número entero 262.537.412.640.768.744, obtenido por ***John Brillo*** de la University of Arizona;
5. y la construcción por el afamado parapsicólogo ***Robert Ripoff***, de un motor que funciona con energía mental...



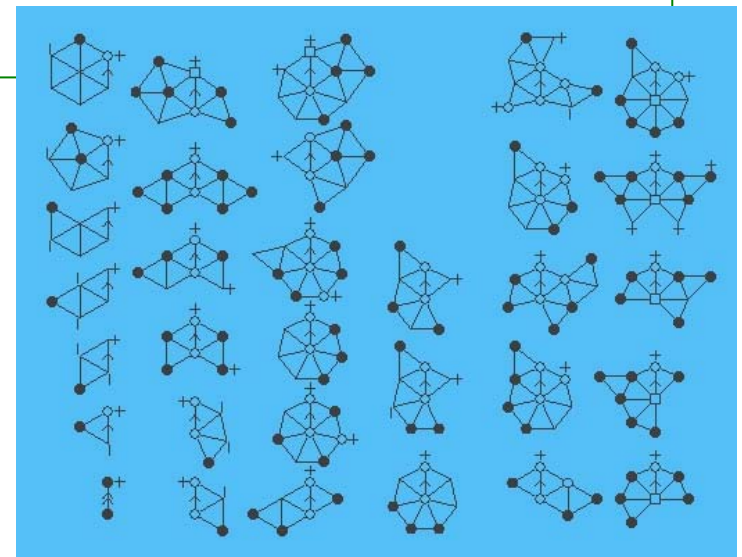
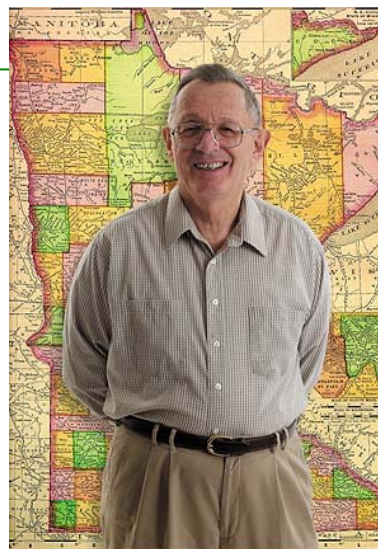
Stan Wagon (entre otras muchas personas que escriben a Gardner) muestra que este mapa puede colorearse con 4 colores...



La prueba de Haken y Appel

El progreso era lento, hasta que en 1976 Ken Appel y Wolfgang Haken dieron una prueba cuyos principales ingredientes eran los conceptos de **descarga** y **reducibilidad** (además de cadenas de Kempe, etc.): una vez obtenida la larga lista de configuraciones inevitables, demostraron que eran reducibles, obteniendo una prueba inductiva del teorema.

Ken Appel



Wolfgang Haken (1928-)

Haken hizo su tesis en topología, no encontró puesto en la Universidad y se fue a trabajar como físico a *Siemens*. Allí seguía intentando probar la **conjetura de los 4 colores**, el **knot problem** (algoritmo que decide cuando un nudo es trivial), y la **conjetura de Poincaré...**



En 1961 publica la solución del **knot problem** (anunciada en el **ICM1954** de Amsterdam) en Acta Math. 205 (1961) 245-375, y entra en la Universidad de Illinois, al impresionar al lógico W.W. Boone: el teorema de incompletitud de Gödel hacía pensar a los lógicos que problemas como el de los 4 colores no se solucionaban porque eran **irresolubles** (al contrario de lo que pensaban los topólogos)...

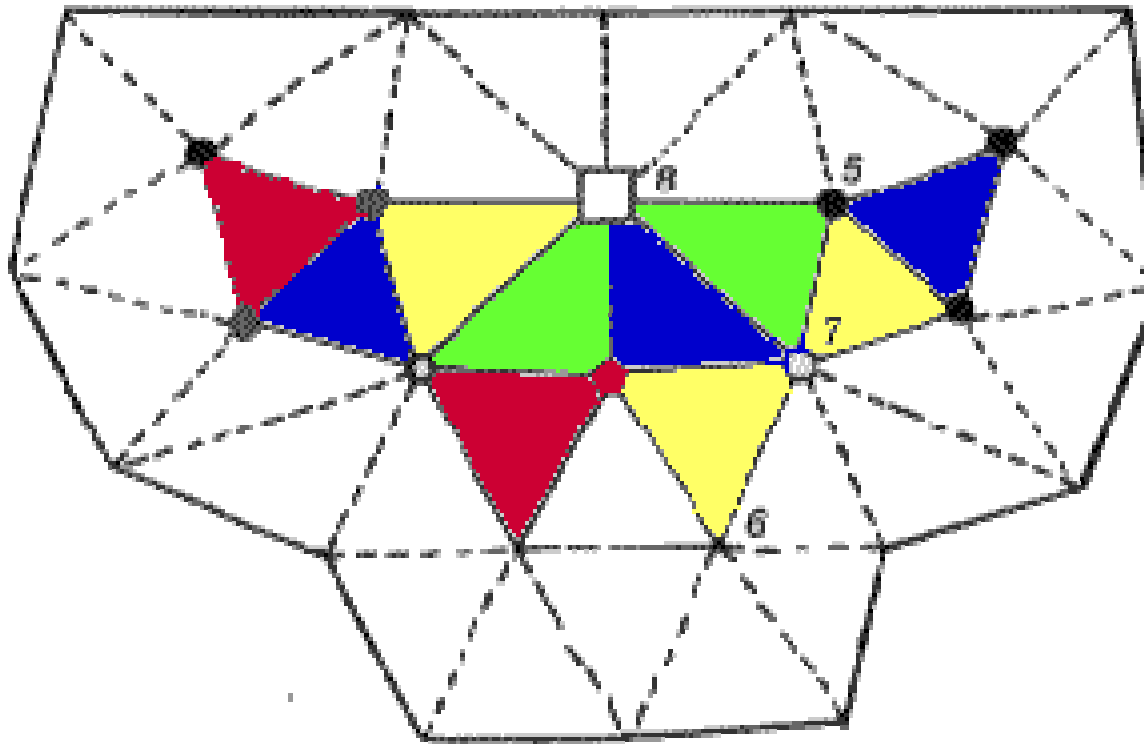
Wolfgang Haken invita a Heesch a la Universidad de Illinois en 1963.

La primera prueba de Appel, Haken y Koch usó un algoritmo de descarga complicado, que produjo una lista de **1.936 configuraciones inevitables**, cada una de las cuales se demostró reducible, con la ayuda de un ordenador.

Modificando el algoritmo de descarga (para producir un conjunto inevitable cada vez mejor), encontraron otro mejorado (con **300 reglas de descarga**) que produjo un conjunto de **1.482 configuraciones inevitables**. Se demostró que eran reducibles con la ayuda de un ordenador programado por Koch, para buscar las extensiones equeridas del coloreado, llevó **1.200 horas (= 50 días)** de cálculo en un **IBM 360**.

Appel y Haken completaron la demostración en 1976.

... Uno de los 1.468



Por ejemplo, en la prueba de reducibilidad de esta configuración, se necesitan unos **199.000** coloreados...

Appel tiene soltura en el manejo de ordenadores, Haken no... Y aunque encuentran dificultades en su Universidad por la cantidad de horas de ordenador precisadas para sus cálculos, envían finalmente su prueba al Illinois Jour. of Maths., en unas 140 páginas y dos partes:

- en la primera, explican la estrategia de la prueba y el proceso de descarga usado para construir el conjunto inevitable de configuraciones y
- en la segunda, Appel, Haken y Koch dan el listado de los conjuntos inevitables y describen los programas de ordenador usados para comprobar que cada miembro es reducible.

También están disponibles en una microficha, unas **400** páginas de diagramas y la comprobación detallada de los lemas usados en el texto central.

Jean Mayer, profesor de literatura en la Universidad de Montpellier y matemático aficionado (demuestra el teorema de los 4 colores para mapas con 96 regiones) es uno de los referees de la *inevitabilidad* y **Frank Allaire** es el de la *reducibilidad* (más tarde daría otra prueba del teorema de los 4 colores).

Incluso la familia de Haken (su hija en particular) les ayudó a repasar las tareas a mano,... y tras corregir erratas, eludir falsos anuncios de virus, etc., la Universidad de Illinois adquirió como ***triunfante matasellos***:



Appel y Haken comentan: ***“Aunque el proceso de transferencia de cargas (excepto las reducciones) se puede comprobar a mano en uno o dos meses, es virtualmente imposible verificar de este modo los cálculos de reducibilidad. De hecho, el referee del artículo verificó el proceso de transferencia de cargas de acuerdo con nuestras notas, pero verificando el cálculo de la reducibilidad con un programa independiente”.***

En 1989, Appel y Haken reconocen: ***“Kempe’s argument was extremely clever, and although his “proof” turned out not to be complete, it contained most of the basic ideas that eventually led to the correct proof one century later”.***



El apoyo de W.T. Tutte (especialista en teoría de grafos y editor jefe del J. of Combinatorial Theory) fue esencial... frente a las críticas por el carácter “amateur” de muchos de los involucrados en la prueba (familia, no profesionales, etc.).

Wolfgang Haken
Smote the Kraken

One! Two! Three! Four!

Quoth he: “the monster is no more”.

W.T. Tutte

Hubo mucha publicidad en los periódicos: **Eureka!** en Time (20/9/76):
“**Appel and Haken may well have ushered in a new era of computer computation on the frontiers of higher mathematics**”.

<http://www.time.com/time/magazine/article/0,9171,946631,00.html>

¿Eso es una prueba?

Muchos matemáticos aceptaron ésta como una prueba irrefutable, pero otros muchos argumentaron que **eso** no era una demostración matemática, ... la máquina había comprobado que una gran cantidad de mapas podían colorearse usando a lo más 4 colores, ¿pero, y si existía un mapa, que el ordenador no hubiese contemplado y que no podía colorearse de esa forma? Los principales reproches eran que:

1. una parte de la prueba no podía verificarse a mano, y
2. la parte hecha a mano era complicada y no había sido verificada de forma independiente.

En esa época uno de los comentarios que se hacían era:
“Una buena demostración matemática es como un poema - ¡esto es un listín telefónico!”.

Otra nueva prueba

En 1996, N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour y R. Thomas (Georgia Institute of Technology), publican ***A new proof of the four-colour theorem.*** ¿Qué hace la nueva prueba diferente de la de Appel y Haken?

1. elimina complicaciones, confirmando que la inevitabilidad de un conjunto reducible puede probarse, sin estudiar tantos casos como en la prueba de Appel y Haken;
2. el conjunto inevitable es de tamaño **633**;
3. dan un conjunto de **32** reglas de descarga;
4. la comprobación a mano de la inevitabilidad se reemplaza por una prueba formal que puede verificarse por ordenador;
5. esta comprobación lleva sólo 3 horas en cualquier ordenador.



Y más aún...

En 2000, **Ashay Dharwadker** da otra prueba del teorema de los 4 colores, no basada en ideas previas, utilizando **teoría de grupos, teoría de sistemas de Steiner y correspondencias de Hall**. Aún hoy en día, parece que se ignora esta prueba: se trata de una demostración larga y complicada, pero que no precisa de un ordenador...

A. Dharwadker, *A New Proof of the Four Colour Theorem*, 2000,
<http://www.geocities.com/dharwadker/>

R. Stewart, *A Review of Dharwadker's Proof*, 2005,
<http://fourcolourtheorem.tripod.com/>



Y más aún...



En 2004, **Benjamin Werner** (INRIA) y **Georges Gonthier** (Microsoft Res., Cambridge) verifican la prueba de Robertson et al. de 1996 (con alguna aportación original), formulando el problema en términos del programa **Coq 7.3.1** (que utiliza ecuaciones de tipo lógico). Este acercamiento elimina la necesidad de ***fiarse*** de los variados programas de ordenador usados para verificar los casos particulares: basta con ***dar crédito*** al asistente Coq. Confirman la validez de cada una de las etapas de la prueba.

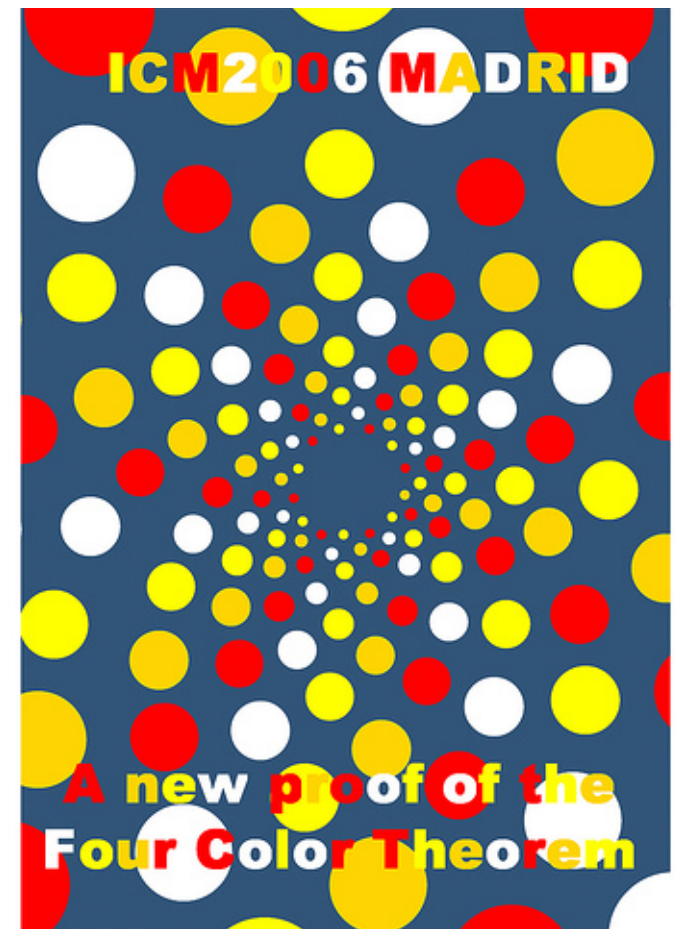
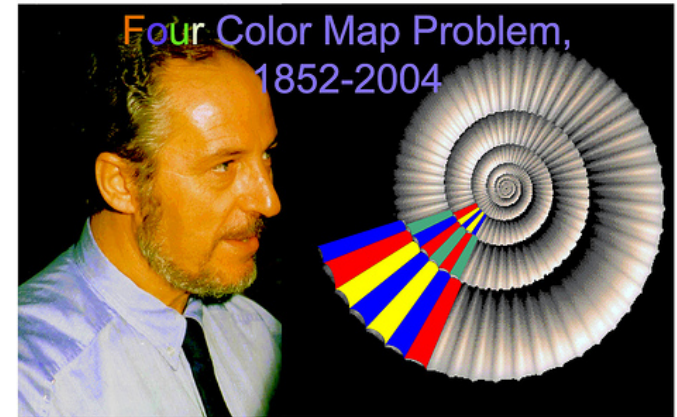
<http://research.microsoft.com/research/downloads/Details/5464E7B1-BD58-4F7C-BFE1-5D3B32D42E6D/Details.aspx>

Y más aún...

En 2004, **Ibrahim Cahit** dice haber demostrado la conjetura, usando el nuevo concepto de ***cadena espirales***, sin ordenador, en 12 páginas (preprint, agosto 2004), aún no publicado... Y lo explica en el ICM2006...

Artículo enviado a la revista ***Graph Theory, Computational Intelligence and Thought...*** y aún no publicado...

<http://www.emu.edu.tr/~cahit/>



Guión de la charla

Historia de la conjetura de los cuatro colores:
de 1852-1996

La “prueba” errónea de Kempe... y sus buenas ideas

Un siglo más tarde: llega la “demostración” con ayuda de ordenador

☺ ¿Está realmente resuelta la conjetura?

Conclusiones

La demostración de la conjetura de los 4 colores:

1. ha servido de **estímulo** en el desarrollo de teorías matemáticas como la **teoría de grafos** y de **redes**;
2. es el **primer mayor teorema** probado (¿verificado?) con ayuda de un **ordenador**...

Este asunto levantó mucha polémica en el momento de la aparición de la demostración... atenuada por la aparición de otras pruebas realizadas con ayuda de ordenador como la *clasificación de los grupos simples finitos* (que depende de cálculos imposibles de ejecutar con detalle a mano), o la solución de Hales del *problema de Kepler* sobre el empaquetamiento óptimo de esferas...

¿Qué es una demostración?

Esta prueba ha suscitado muchos interrogantes “meta-matemáticos” sobre el papel asignado a la mente humana y a los ordenadores en las matemáticas: ¿se puede aceptar como válida una afirmación que sólo una máquina, y no una mente humana, puede comprobar?

¿Qué es realmente una **demostración**? El matemático y filósofo de la Ciencia Imre Lakatos (1922-1974) define:

Una demostración es una sucesión finita de fórmulas de algún sistema dado, donde cada uno de los pasos de la sucesión es o bien un axioma del sistema, una fórmula derivada por una regla del sistema a partir de una fórmula precedente .



El filósofo Thomas Tymoczko (1943-1996), en “***The four-Color problem and its philosophical significance***” (1979) caracteriza una demostración como algo:

- ***convinciente*** (suficiente como para convencer incluso a los escépticos que duden de la veracidad del resultado),
- ***formalizable*** (la conclusión debería alcanzarse partiendo de sistemas axiomáticos), y
- ***comprobable***.

Este último es el aspecto más controvertido en el caso del teorema de los 4 colores... el problema de la ***comprobabilidad*** se ilustra perfectamente por el acertijo del ***árbol cayendo***: ¿Puede el árbol caer si no se le oye? ¿Puede estar un teorema demostrado si no se puede leer su demostración?

¿Qué prueban las demostraciones? Teoremas.

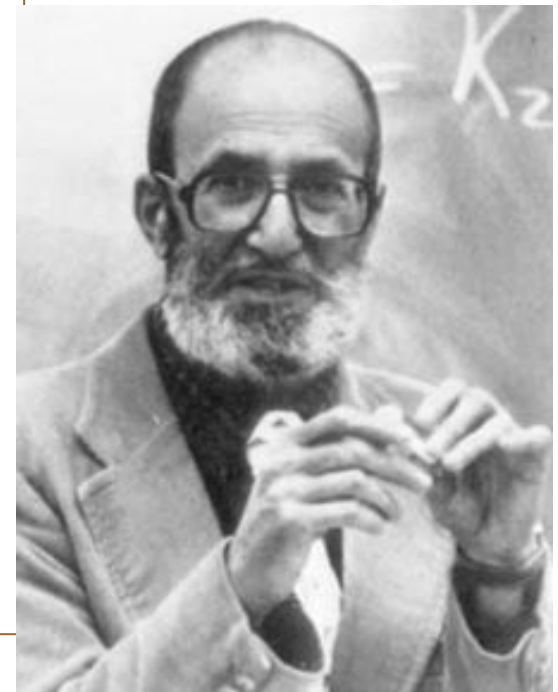
Según E.R. Swart en “*The philosophical implications of the four-colour theorem*” (1980), no hay un tipo de teorema, sino cuatro:

1. teoremas cuya prueba puede realizarse en la **cabeza** de uno,
2. aquellos que precisan **lápiz y papel** para demostrarse,
3. teoremas que no sólo requieren **lápiz y papel**, sino también una gran cantidad de **esfuerzo y tiempo**,
4. aquellos que sólo pueden probarse con ayuda de un **ordenador**.

La división no está clara... pero, el **teorema de los cuatro colores** se encontraría en la categoría 4.

El aspecto de la **comprobabilidad** es el que pone en duda la credibilidad de la prueba. Si las pruebas deben ser verificadas, parece que entonces automáticamente una persona (lo opuesto a una máquina) debe completar esta tarea: esto no puede hacerse con la demostración del **teorema de los 4 colores**.

Paul Halmos (1916-2006) opina que la demostración realizada con un ordenador tiene la misma credibilidad que si está hecha por un **adivino**, las máquinas tienen algunas propiedades físicas que aún tenemos que entender... **“No puedo aprender nada de la demostración. La prueba no indica la razón por la que sólo se necesitan 4 colores ¿por qué no 13? ¿Qué tiene de especial el número 4?”**



Tymockzo dice que usar un ordenador para establecer una verdad matemática es transformar pruebas en experimentos. Afirma que el **teorema de los cuatro colores** ha sido “confirmado” a través de un experimento de física teórica, pero no probado de una manera formal. Aunque se tiene una pequeña idea de lo que el ordenador está “testando”, no se tiene el 100% de seguridad de lo que se está haciendo.

Esto significa que la naturaleza de los resultados demostrados con ordenador es del tipo “**Simon dice**”, donde se invita a los matemáticos a “**tener fe**” y a creerse lo que una criatura “superior” afirma...



John L. Casti afirma respecto a la prueba del teorema de los 4 colores: ***“Como el problema se ha obtenido por medios totalmente inapropiados, ningún matemático de primera fila debería trabajar más en ello y por lo tanto una demostración decente puede ser retrasada indefinidamente... Así que hemos hecho una cosa mala, muy mala y pienso que una cosa similar no debería cometerse nunca más”***.

En respuesta a esta opinión, el especialista en teoría de grafos y combinatoria Dan Archdeacon responde: ***“Hay muchas malas pinturas de jardines, pero eso no impidió a Van Gogh pintar sus girasoles”***...

El periodista científico **John Horgan**, dice en “*The dead of proof*” (Sci. American, 1993): “*Hay una diferencia entre probar una conjetura y demostrarla con probabilidad 1: lo último no es, en el sentido correcto dela palabra, una prueba. [...] Una prueba que ofrece una probabilidad de verdad y no una certidumbre es un oxímoron*”.

Lit. Figura retórica de pensamiento que consiste en complementar una palabra con otra que tiene un significado contradictorio u opuesto

“Si creemos en la ciencia debemos aceptar la posibilidad de que la era de los **grandes descubrimientos** científicos haya pasado ya. Por ciencia entiendo no la ciencia aplicada, sino la ciencia en su vertiente más pura y más grandiosa, a saber, ese deseo profundo del ser humano de comprender el universo y el lugar que ocupa en él. Podría ser que las investigaciones ulteriores no aportaran más revelaciones ni revoluciones de envergadura, sino tan solo unos rendimientos graduales. [...] Otro catalizador de cambio es el **ordenador** que está llevando a la comunidad matemática a reconsiderar la naturaleza de lo que es una prueba, y por lo tanto de la verdad”.

Opinan los no escépticos

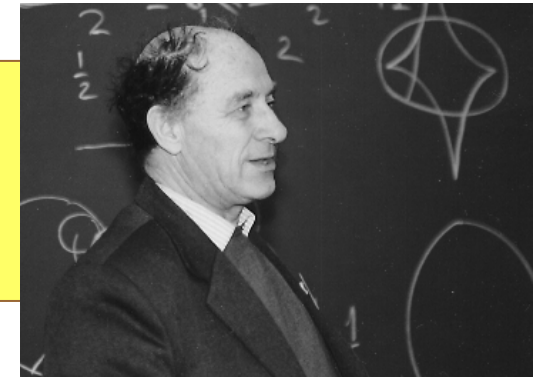
La queja de los ordenadores tienen virus o producen **errores**, se puede aplicar de la misma manera a las personas, que se confunden muy a menudo. Aunque los errores cometidos por los ordenadores son más difíciles detectar, los seres humanos se equivocan con más frecuencia. Los ordenadores siguen un programa rígido predeterminado, y no tienen distracciones motivadas por los cambios de humor, el estrés u otros factores externos.

La **longitud** de algunas demostraciones está más allá de la capacidad de computación humana, pero es perfectamente aceptable por los estándares de las máquinas.

La idea de que **no** pueden usarse ordenadores será cada vez más extraña para las generaciones venideras: es una cuestión de aceptación y familiaridad, serán (*¿son?*) herramientas como el ***lápiz y el papel...***

La prueba de Appel y Haken es en cierto sentido convencional, consiste en una serie de pasos lógicos, que conducen a una conclusión: la conjetura puede reducirse a una predicción sobre el comportamiento de unos 2.000 mapas diferentes.

Otra opinión...



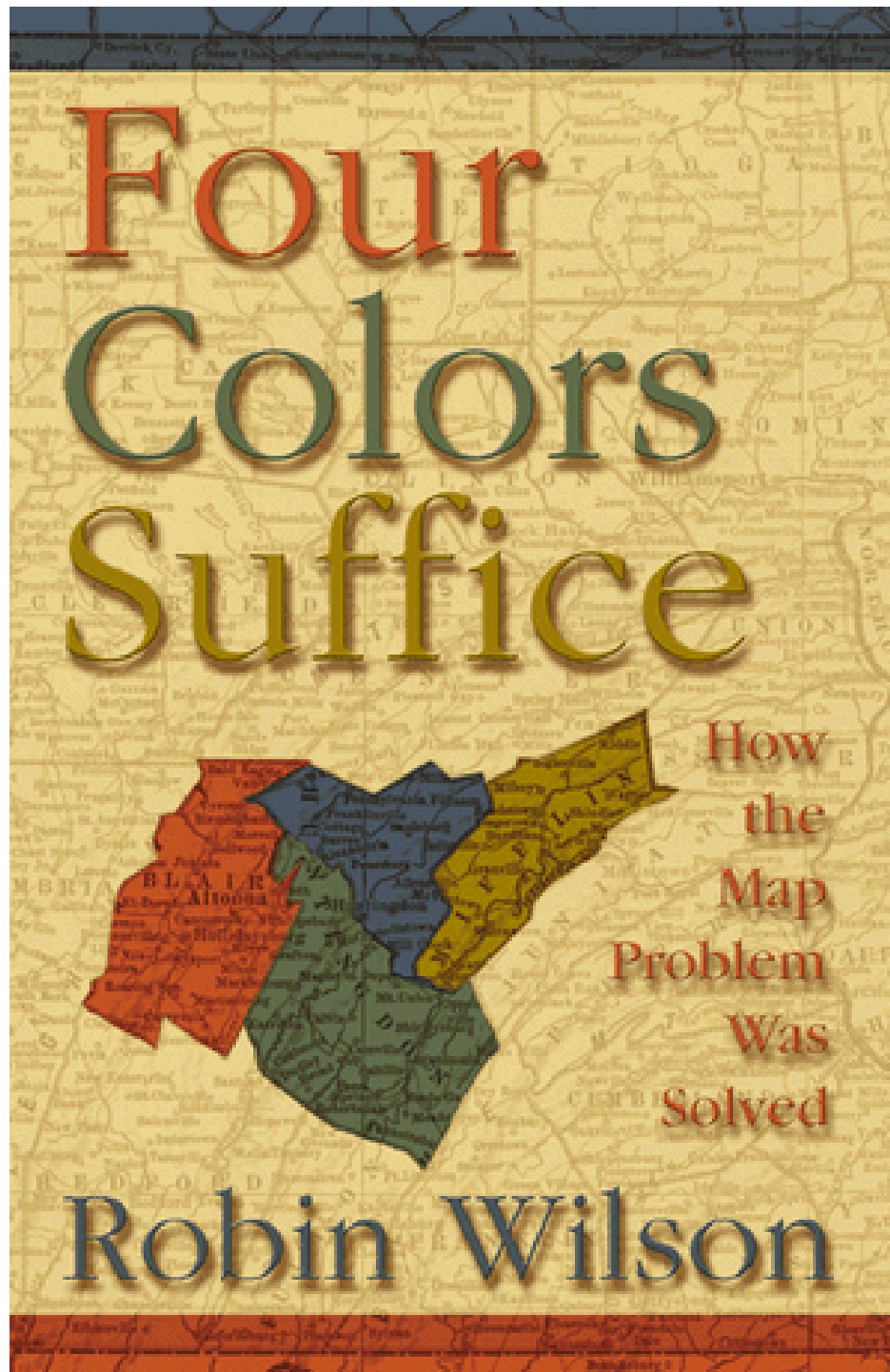
El prestigioso matemático ruso Vladimir I. Arnold, considera que la matemática es una **ciencia experimental**. Su artículo “**Sur l'éducation mathématique**”, Gazette de Maths 78 (1998), 19-29, comienza diciendo: **“Las matemáticas forman parte de la física. La física es una ciencia experimental, una de las ciencias naturales. Las matemáticas son la parte de la física en la que los experimentos son baratos”**.

De hecho, Arnold exige aplicar a la investigación en matemática el esquema clásico en física: **experimento - modelo - estudio del modelo - conclusiones - verificación por la experiencia**.

Arnold sostiene que **siempre** debe ser así, incluso **sin ordenador**, y es equivocado el esquema, para algunos matemáticos paradigmático, **definición - teorema - demostración**.

El esquema clásico en física es en esencia el usado por cualquier modelista matemático: a partir de la **experiencia**, plantear el **modelo** (con las etapas auxiliares de los modelos matemáticos computacionales: diseño o elección del método numérico a usar, programación, implementación, puesta a punto, validación) y luego **experimentación numérica** (estudio del modelo) y **conclusiones**... que, pueden llegar a la detección de fenómenos físicos antes no identificados.

El filósofo **Ludwig Wittgenstein** distingue entre las matemáticas y las ciencias naturales, diciendo que: ***“Un experimento no garantiza que se obtenga siempre el resultado original si repite varias veces. Las demostraciones, sin embargo, no son relativas temporalmente, son verdades eternas”...***

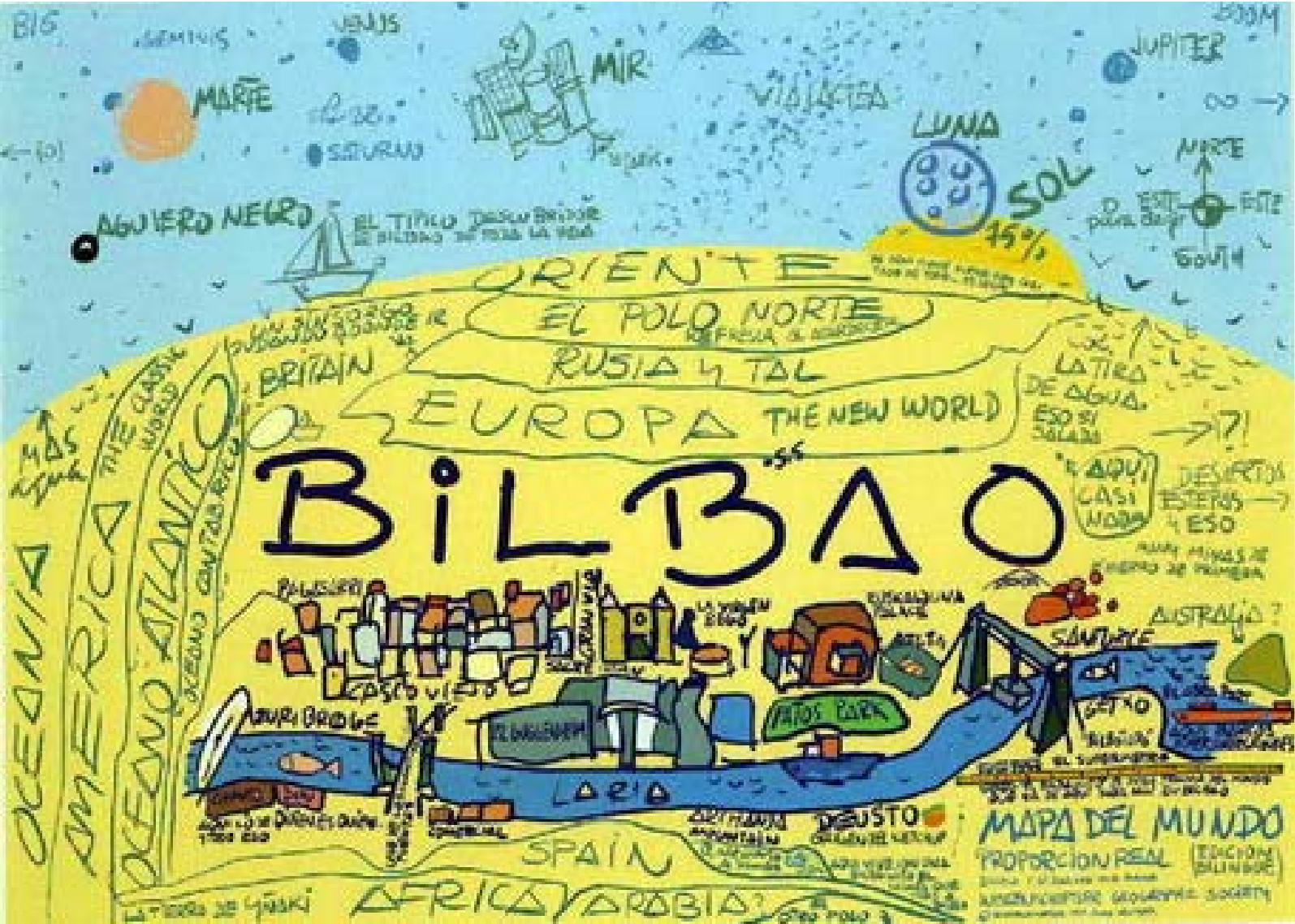


Four colors suffice
How the map problem
was solved

Robin WILSON
Princeton Univ. Press, 2002

Donald Mackenzie,
*Slaying the Kraken: the
sociohistory of a
mathematical proof*, Social
Studies in Science 29(1),
7-60, 1999.

¿Un contraejemplo? El mapa-mundi de Bilbao



**G
R
A
C
I
A
S**